2014 年 3 月 18 日

道脇　裕

零除算

0/0＝0 の証明（可引集合編）

定義：A,B を非負実数とするとき，除算 B/A の演算を，以下で定義する．

$$|B|-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=0 \quad (0\leqq a)\ (A,B,a\in \mathrm{R})$$

において，$B_0=B$，$A_j=A$　(j=0,1,2,･･･)として，可引漸化式 $B_j-A_{j+1}=B_{j+1}$ における A_{j+1}（この A_{j+1} を第 j+1 可引数と呼ぶ）を元とする集合を第 j+1 可引数集合$\{A_{j+1}\}$とし，B_j（この B_j を第 j 被可引数と呼ぶ）が $B_j>B_{j+1}\geqq 0$ を満たすとき，$\{A_{j+1}\}\neq\emptyset$．満たさないとき，$\{A_{j+1}\}=\emptyset$として，全ての可引数集合$\{A_{j+1}\}$を要素とする集合を可引集合$\{A\}$とする．

ここに，B は被除数，A は除数，$|\{A\}|$は可引集合$\{A\}$の要素数$|\{A\}|$であって B/A の商であり，a は剰余であって，$|\{A\}|$を最大化したときにとり得る非負最小実数である．

このとき，次の定理が成り立つ．

定理１：0/0＝0 が成り立つ．

証明：定義$|B|-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=0$ より，$B=0\Rightarrow a=0$.

従って，$0-(|\{A\}|\cdot|A|+0)=0-|\{A\}|\cdot|A|=0$.

ここで，$A=0\Rightarrow 0-|\{A\}|\cdot|A|=0-|\{A\}|\times 0=0$.

さて，$B=B_0=0\wedge A=A_j=0$ 故に，可引漸化式 $B_j-A_{j+1}=B_{j+1}$ は $0-0=0$ であって $B_j>B_{j+1}\geqq 0$ は満たさない．よって，可引集合$\{A\}=\{\{A_1\},\{A_2\},\cdots,\{A_j\},\cdots\}=\{\emptyset,\emptyset,\cdots,\emptyset,\cdots\}=\emptyset$であり，要素数$|\{A\}|=|\emptyset|=0$を得る．従って，$A=B=0\Rightarrow B-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=0-(0\times 0+0)=0$.　∴　0/0＝0.

100/0＝0 の証明（可引集合編）

定理２：割り算 B/A にける $A=0$ の商は 0 で，余りは B となる．

証明：定義$|B|-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=0$ より，$A=0$ ならば,

$$B=|\{A\}|\cdot|A|+a=|\emptyset|\cdot|0|+a=0\times 0+a=a$$

である．ところで，この両辺を $A=0$ で割ると，

$$\frac{B}{A}=\frac{|\{A\}|\cdot|A|+a}{A}=\frac{|\{A\}|\cdot|A|}{A}+\frac{a}{A}=\frac{|\emptyset|\times|0|}{0}+\frac{a}{0}=\frac{0\times 0}{0}+\frac{a}{0}=\frac{0}{0}+\frac{a}{0}=0+\frac{a}{0}=\frac{a}{0}$$

を得る．但し，0/0＝0 は定理 1 による．ここで，$B\neq 0\Rightarrow a\neq 0$ であって,

$$(\text{左辺})=\frac{B}{A}=\frac{B}{0}\qquad(\text{右辺})=\frac{a/\mathrm{a}}{0/\mathrm{a}}=\frac{1}{0}$$

であるから,

$$\frac{B}{0}-\frac{1}{0}=0$$

$$\frac{B-1}{0}=0$$

を得る．つまり，$a/0=0$ が成り立つ．勿論，明らかに，a は，$|\{A\}|$を最大化した際の非負最小数であるから $B\neq 0$ における除算 B/A にける $A=0$ の商は 0 で，余りは B となる．□

このことは，可引集合による除算の拡張定義によれば， 0 除算において商は等しく 0 となっても厳密には剰余項の情報を保持することを意味する．

100/0＝0 の証明（一般分数編）

定理２：$x/0=0$（$x\in\mathrm{R}$）が成り立つ.

証明：$F(B,A)=B/A$ とおく．このとき，$a\neq 0$ に対して，

$$F(a,0)=F(a/a\,,0/a)=F(1,0)$$
$$\therefore\ F(a,0)=F(1,0)$$

一方,

$$F(a,0)=F(a\times 1,0)=aF(1,0)$$

従って,

$$aF(1,0)=F(1,0)$$

これより,

$$(a-1)F(1,0)=0$$
$$\therefore\ \ F(1,0)=\frac{0}{a-1}$$

を得る．ここで，$a\neq 1\Rightarrow F(a,0)=F(1,0)=0$ が成り立つ．また，$a=1$ ならば,

$$F(1,0)=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}=0$$

を得る．□

x/0＝0 の証明（特性分数関数）

定義：除算 B/A を AB/A^2（$A,B\in\mathrm{R}$）で定義する．このとき，次の定理が成り立つ.

定理３：$x/0=0$（$x\in\mathrm{R}$）が成り立つ.

証明：定義より $A=0\Rightarrow\forall B\{AB/A^2=(0\times B)/0^2=(0\times B)/(0\times 0)=(0\times B)/0=B\times 0/0=B\times 0=0\ \}\therefore\ \ B/0=0$
□

補足１：割り算 B/A の定義 AB/A^2 において，$A\neq 0\Rightarrow AB/A^2=B/A\wedge A=0\Rightarrow A/A\neq 1$ であることに注意を要する.

補足２：$B\times 0/0=B\times 0$ の式の展開は，$0/0=0$ を用いていることに注意を要する.

補題：双曲関数 $f(x)=a/x$（$0<a$）において，定義域を$-\infty<x<+\infty$とするとき，値域は$-\infty<y<+\infty$となるが $x=0$ の十分近傍，即ち，$x\to\pm\varepsilon$（$0<\varepsilon<E$：十分に小さい任意定数より小さい定数である）では,

$$\lim_{x\to+\varepsilon}f(x)=\lim_{x\to+\epsilon}\frac{ax}{x^2}=\lim_{x\to+\varepsilon}\frac{a}{x}=+\infty$$

また,

$$\lim_{x\to-\varepsilon}f(x)=\lim_{x\to-\epsilon}\frac{ax}{x^2}=\lim_{x\to-\varepsilon}\frac{a}{x}=-\infty$$

となる．勿論，この表記は,

$$\lim_{x\to+\varepsilon}f(x)=\lim_{x\to+0}f(x)\qquad(0<\varepsilon<E：十分に小さい任意定数より小さい定数である.)$$

を意味する.

これは一見すると，$x=0$ で $f(x)$はあたかも$-\infty=+\infty$かのうように錯覚させるが，極限の概念では、$x\to+0$ はあくまでも x を 0 に近づけるのであって，決して 0 には到達せず，0 点の正側の近傍の域を出ない．従って，明らかに,

$$\lim_{x\to+0}f(x)\neq\lim_{x\to-0}f(x)\wedge -0<+0$$

が成り立つ．他方，　$f(x)$において x＝0 とする（ここで，このような操作を局所化と呼ぶものとする）と，

$$\underset{x=0}{\mathrm{loc}}\, f(x) = \underset{x=0}{\mathrm{loc}} \frac{a}{x} = \frac{a}{0} = 0$$

が成り立つ．このことは，0 近傍の±0 の辺りでそれぞれ±∞に近づく対極的な発散方向にあったものが，中間点である $f(0)$＝0 となっていて，従って，－∞＝+∞問題は解決されていることを意味する．従って，

$$\lim_{x\to -0} \frac{a}{x} = -\infty < \frac{a}{0} = 0 < \lim_{x\to +0} \frac{a}{x} = +\infty$$

であって，極限と 0 除算は異なる概念であると言える．逆に，極限の概念や操作では 0 除算に成らないことにも注意を要する．

回転系の考察

定義:角速度 ω で回転する回転系の回転半径 r における接線速度 v を用いて v＝$r\omega$ とする. このとき，次の定理が成り立つ.

定理４：回転系の回転中心は回転しない.
証明：底辺を r，高さを v とする直角三角形を考えれば、その傾き ω＝v/r>0 は、定理２より r＝0 において ω＝0 となり，これら r，v，ω にそれぞれ回転半径，接線速度，角速度の物理量をあてると，回転中心は回転しないことがわかる．□

定理５：点は回転しない.
証明：点 P が回転していると仮定すると，点 P は角速度 ω>0 を有することになり，従って接線速度 v>0 を有することになる．このとき，r＝v/ω>0 であるから点 P は半径 r>0 を満たすことになるが，仮定より点は r＝0 であるから矛盾する．このような矛盾が生じたのは点 P に角速度ω>0 があると仮定したことによる．故に，点 P は角速度ω＝0 でなければならない．□

$\omega = \dfrac{v}{r}$ と $x/0$＝0 と微分学の関係

角速度 ω で回転する回転系の回転半径 r における接線速度 v を用いれば，$v(r) = \omega r$ と表される。v を r について微分すると，

$$\lim_{\Delta r\to \varepsilon} \frac{\omega(r+\Delta r) - \omega r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to \varepsilon} \frac{\omega \Delta r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to \varepsilon} \frac{\Delta r}{\Delta r}\omega = \omega$$

ただし，

$$0 < \varepsilon < E$$

であって、E はどんなに小さな定数より小さい定数である.
ここで，重要なことは，ε は，

$$0 < \varepsilon \land \varepsilon \neq 0$$

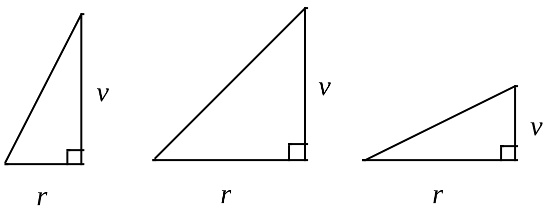
でなければならないということである．これこそが微分の本質である．ε は限りなく 0 に近づけるが決して 0 ではない．そうでなければ，Δr→0 とすることになり，

$$\lim_{\Delta r\to 0} \frac{\omega(r+\Delta r) - \omega r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to 0} \frac{\omega \Delta r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to 0} \frac{\Delta r}{\Delta r}\omega = \lim_{\Delta r\to 0} \frac{0}{0}\omega$$

となって，微分学が，暗黙に 0/0＝1 としていることになってしまうからである．
つまり，微分は，$\Delta r \to \varepsilon$（$\varepsilon \neq 0 \wedge 0 < \varepsilon < E$：$E$ はどんなに小さな定数より小さい定数.）によって成り立ち，0 点までは行けない．微分では，或る 1 点に迫ることは出来ても到達することは出来ない．これは，微分における極限を取るという操作が動的なものであることを意味する．
（補足：例えば，微分学上では，高次の無限小等は扱えず，極微細領域を厳密に取り扱うことが出来ないということもある.）

ところで，以下のような３つの直角三角形を考える．

Ⅰ　　　　Ⅱ　　　　Ⅲ



三角形Ⅰの場合、$r<v$ であって $\omega_{\mathrm{I}} = v/r$ で相似形に v を 0 に近づけて行くと、$r<v$ の関係を保ちながら辺々0 に近づき、v が長さ 0 に達すると，つまり，局所化すると大きさが 0 の点になる．このとき，傾きは 0 であり，勿論，$r<v=0$ ゆえに $r=0$.
ここで, $\omega_{\mathrm{I}} > \omega_{\mathrm{II}} > \omega_{\mathrm{III}}$であるから三角形Ⅰと同様に三角形Ⅱ, Ⅲも 1 つの頂点に局所化し, 最終的には, $\omega_{\mathrm{I}} = \omega_{\mathrm{II}} = \omega_{\mathrm{III}} = 0$ に集約されてしまう.
微分学は，この頂点まで到達することが出来ないので，あくまでも頂点と頂点に限りなく近い別の点との線形近時直線の傾きを見ているに過ぎない．この結果は，0/0＝0 に反しない上，微分学とも全く反しない上，相補的存在とさえ言える．