2015.9.3
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

帯分既約分数とゼロ除算

１．序論

近時，筆者は，除算 a/b において，$b=0$ のとき，商が 0 となる定義と証明を示した．ゼロでも割ることが出来るという結果は画期的である．しかしその一方で，必ずしもゼロ除算を正しく実行できない形式が存在することも注意するべきである．以下，本稿ではその具体的な事例を示しながらゼロ除算の禁止則について考察する．

２．ゼロ除算禁止則に抵触する帯分既約分数

$a,b,c\in\mathbb{R}$ 且つ $c\neq 0$ とするとき，

$$\frac{a+bc}{b}=\frac{a}{b}+c \qquad (1)$$

の関係を満たす右辺を，ここでは帯分既約分数といい，左辺を右辺のように変形することを帯分既約化ということとする．また，逆に(1)式の関係を満たす左辺を，ここでは帯分通分数といい，右辺を左辺のように変形すること帯分通分化という．なお，(1)式では，$a>b$，$a=b$，$a<b$ の何れであってもよい．

２．ゼロ除算における禁止則

定理　帯分既約分数は，分母を 0 とするゼロ除算を適用することはできない．

証明　$a,b,c\in\mathbb{R}$ 且つ $c\neq 0$ として，

$$\frac{a+bc}{b}=\frac{a}{b}+c \qquad (1)$$

において，$b=0$ とする．すると，(1)式の左辺は，

$$\frac{a+bc}{b}=\frac{a+0\cdot c}{0}=\frac{a+0}{0}=\frac{a}{0}=0 \qquad (2)$$

となる．他方，(1)式の右辺は，

$$\frac{a}{b}+c=\frac{a}{0}+c=0+c=c \qquad (3)$$

となって，これは，(2)式と(3)式の比較から明らかに矛盾する．このような不合理が生じたのは(3)式が帯分既約化された分数，即ち，帯分既約分数であるからに他ならない．■

この不合理の要因は，(1)式右辺が

$$\frac{a+bc}{b}=\frac{a}{b}+\frac{bc}{b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{b}c=\frac{a}{b}+c \qquad (4)$$

という二項分数式の既約化であること，或いは，

$$\frac{a+bc}{b}=\frac{cb+a}{b}=c\frac{a}{b}=\frac{a}{b}+c \qquad (5)$$

という帯分化の延長上にあることに起因する．つまり，既約化過程や帯分化過程の中には，

$$\frac{b}{b}=1 \qquad (6)$$

という扱いの処理が含まれているのであり，そのため，b=0 とした際のゼロ除算

$$\frac{b}{b}=\frac{0}{0}=0 \qquad (7)$$

との間に矛盾が生じることが真の要因である．従って，帯分既約分数は，ゼロ除算を適用することが出来ないと言える．

以上の考察からも明らかなとおり，ゼロ除算にあっては，通分が禁止されるだけではなく，約分も禁止されるということであり，その本質的な要因は，通分も約分も何れも

$$\frac{b}{b}=1 \qquad (8)$$

を用いている一方で，分母が 0 となる，即ち，ゼロ除算では

$$\frac{b}{b}=\frac{0}{0}=0 \qquad (9)$$

であるから b の値域に 0 が含まれる場合には，通分も約分もできないことを意味する．

ところで，以上は，ゼロ除算が禁止則を内包しており，あたかも限定的な世界であるかのような誤解を与えるかも知れないが，実際にはそうではない．寧ろ，ゼロ除算自体を禁止している世界で通用する特殊な解法，つまり，不適当な約分や通分が禁止されるということを意味している．このことは，分母がゼロをとり得るか否かということに加え，それが許容されるか否かということを勘案して整理する必要があることを示している．そこで，これを文述的に以下のように，整理すると，

ゼロ除算不可公理系　⇒　通分可能∧約分可能

ゼロ除算可能公理系　⇒　通分不可∧約分不可

と表される．さらにこれを記号化すると，

$$\bar{0}\equiv(/a+/a)\wedge(/a+b)$$

$$0\equiv\overline{(/a+/a)}\wedge\overline{(/a+b)}$$

と整理される．この関係は，ゼロ除算の公理系に対する対称性とみなせるので，以下この対称性をゼロ除算の対称性公理ということとする．

ゼロ除算の対称性公理によれば，公理系$\bar{0}$を適用して導かれた数式や物理方程式等に対して，むやみにゼロ除算を適用することが出来ないということが言える．それは，公理系$\bar{0}$にあっては，最終的な式（公式，法則式）の導出過程において通分や約分を適用している可能性が有ることによる．ここで，最終的な式の導出過程に帯分既約化処理が含まれる具体例において，帯分既約化処理を含まないで導出した形式と比較検討しておくことは多分に有効である．そこで，以下に物理学的な方程式における適用例を用いてこれを示す．

３．帯分既約化処理を施して導出した形式と施さずに導出した形式との比較検討

それぞれの半径 r_1 と r_2（$r_1<r_2$）の小輪と大輪が，距離 d を隔てて軸棒の同軸上に固定され，相対回転しないように構成されているものとする．この同軸同転二輪装置が転動した際に大輪の軌跡として描かれる円弧の曲率半径 R は，

$$R=\frac{r_2}{r_2-r_1}\sqrt{d^2+(r_2-r_1)^2} \qquad (10)$$

と表される（これは、E. Michiwaki の発明した，円や円弧を描くための道具である，無針型車輪式コンパスの原理式であるので，以下，(10)式の曲率半径 R を，EM 半径と呼ぶものとする.）．面白いことに EM 半径 R において，小輪半径 $r_1=0$ とすると，

$$R=\frac{r_2}{r_2-0}\sqrt{d^2+(r_2-0)^2}=\sqrt{d^2+{r_2}^2} \qquad (11)$$

となって，d と r_2 をそれぞれ“針から枢軸までの距離”，“ペン先から枢軸までの距離”と見立てれば，従来の有針型コンパスにおける針とペンを 90°に開いた状態と同じ曲率半径となることがわかる．従って，(10)式は，無針型車輪式コンパスが，従来の有針型コンパスの特殊な拡張形になっていることがわかる．

ところで，EM 半径 R において，小輪半径 r_1 と大輪半径 r_2 の関係は，$r_1<r_2$ とするのが基本的であるが，無針型車輪式コンパスの構造上，小輪半径 r_1 と大輪半径 r_2 とを等しくすることも可能である．それは，即ち，$r_1=r_2$ を意味する．言ってみればこれは，乗用車の後輪のような物である．この関係を EM 半径 R に代入して，R の値を求めると，

$$R=\frac{r_2}{r_2-r_1}\sqrt{d^2+(r_2-r_1)^2}=\frac{r_2}{r_2-r_2}\sqrt{d^2+(r_2-r_2)^2}=\frac{r_2}{0}\sqrt{d^2+0^2}=\frac{1}{0}r_2\mathrm{d} \qquad (12)$$

と表される．つまり，1/0 の解こそが EM 半径 R の値となることを意味する．ここに，ゼロ除算の物理的意味が絶妙に出てくるのであるが，1/0＝無限大と解釈すると，次のような奇妙な関係が出てくることになる．それは，“乗用車の後輪の EM 半径は無限大である”というモノであり，直線状に走行する乗用車の後輪は，有限半径の宇宙の直径よりも大きな EM 半径を持つということになり，従って宇宙の外に EM 半径の中心点が存在するということになるのである．

今度は，1/0＝不定と解釈してみると，“乗用車の後輪の EM 半径は不定である”となってしまう．これは一体どういうことなのであろうか．これは，乗用車の後輪は，EM 半径が定まらず，一定しないので，ふらふら走行すると言うことになってしまうが，乗用車の後輪は真っ直ぐ進むだけなので，この解釈は，“ふら付き過ぎて真っ直ぐ進む”（瞬間瞬間非可算無限回ふら付くので結果として真っ直ぐ進む）とでも言うべきものとなってしまう．

そこで，ゼロ除算 $a/0=0$ を導入すると，EM 半径 R は，

$$R=\frac{r_2}{r_2-r_1}\sqrt{d^2+(r_2-r_1)^2}=\frac{r_2}{r_2-r_2}\sqrt{d^2+(r_2-r_2)^2}=\frac{r_2}{0}\sqrt{d^2+0^2}=\frac{1}{0}r_2 d=0\cdot r_2 d=0 \qquad (13)$$

となる．この解釈は，“左右の車輪の半径が等しいならば，EM 半径は 0 であり，従って，車輪は曲がらずに真っ直ぐ進む“ということになる．これは，あまりにも自然で至極当然な解釈であり，現実に沿ったものとなっていることを意味している．

さて，EM 半径 R に $a/0=0$ を導入すると，現実と適合した正しい解が得られることが示されたが，次のように EM 半径 R を変形して，

$$R=\frac{r_2}{r_2-r_1}\sqrt{d^2+(r_2-r_1)^2}=r_2\sqrt{\left(\frac{d}{r_2-r_1}\right)^2+1} \qquad (14)$$

を得る．(14)式に，$r_1=r_2$ を代入すると，中央の式からは,

$$R=\frac{r_2}{r_2-r_2}\sqrt{d^2+(r_2-r_2)^2}=\frac{1}{0}r_2 d=0\cdot r_2 d=0 \qquad (15)$$

となり，右辺の式からは,

$$R=r_2\sqrt{\left(\frac{d}{r_2-r_2}\right)^2+1}=r_2\sqrt{\left(\frac{d}{0}\right)^2+1}=r_2\sqrt{0+1}=r_2 \qquad (16)$$

となり，矛盾する結果が導かれる．この不合理の要因は，帯分既約化処理を施した式に，ゼロ除算を適用しているからに他ならない．帯分既約化処理を施した場合には，ゼロ除算を適用できないことは明らかである．

４．補遺

ところで，無限という数は存在するだろうか？無限という数が存在すると仮定して(1)式を用いて無限の取り扱いについて考察してみよう．

$a,b,c\in\mathbb{R}$ とし，無限：∞という数が存在するとする．このとき,

$$\frac{a+bc}{b}=\frac{a}{b}+c \qquad (1)$$

において，$b=\infty$ を代入すると，左辺は,

$$\frac{a+bc}{b}=\frac{a+\infty\times c}{\infty}=\frac{a+\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\text{不定} \qquad (17)$$

となる．他方，右辺は,

$$\frac{a}{b}+c=\frac{a}{\infty}+c=0+c=c \qquad (18)$$

となって唯一の値が確定する．従って，(17)式と(18)式から矛盾が生じることが示されるが，これは，通分も約分も何れも

$$\frac{b}{b}=1 \qquad (19)$$

を用いている一方で,

$$\frac{b}{b}=\frac{\infty}{\infty}=\text{不定} \qquad (20)$$

であるから b の値域に∞が含まれる場合には，通分も約分もできないことを意味する．勿論，極限の概念と無限除算やゼロ除算は全く異なる概念であることに注意を要する．

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b}{b}=\lim_{b\to\infty}1=1 \qquad (21)$$

および,

$$\lim_{b \to 0} \frac{b}{b} = \lim_{b \to 0} 1 = 1 \qquad (22)$$

である．これは，b の変化の仕方が分母と分子とで等しいから b が極大化する際も極小化する際も約分可能であることによる．