

x - y 座標系における単位円の接線と座標軸とが成す超三角図形の面積とゼロ除算
及び x 切片速度について

1. x - y 座標系における単位円の接線と座標軸とが成す超三角図形の面積とゼロ除算

x - y 座標系において、単位円 $y^2+x^2=1$ を考える. 特に、ここでは、第一象限だけを考えれば十分である. 従って、単位円の式は、

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad (1)$$

としてよい. この単位円との接点 P の座標を (p,q) とすると、単位円に対する接線の方程式は、

$$px + qy = 1 \quad (2)$$

であって、接点座標 $P(p,q)$ の範囲は、

$$0 \leq p \leq 1$$

$$0 \leq q \leq 1$$

とする.

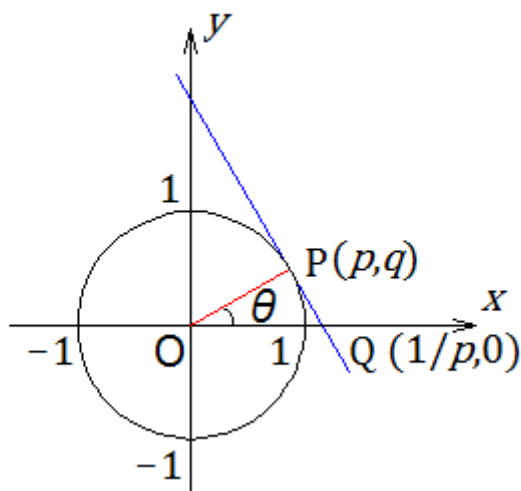


Fig. 1 直角三角形の範囲における超三角形

ここで、(2)式で表される接線と、 x 軸と y 軸とで囲まれる領域を考えると、底辺は、(2)式における $y=0$ のときの x の値であるから、

$$x = \frac{1}{p} \quad (0 \leq p \leq 1) \quad (3)$$

と表され、高さは、(2)式における $x=0$ のときの y の値であるから、

$$y = \frac{1}{q} \quad (0 \leq q \leq 1) \quad (4)$$

となる. 勿論、接点の範囲を、 $0 < p < 1$ 、 $0 < q < 1$ に限れば、接線と x 軸と y 軸とで囲まれる領域は直角三角形になるので、 $0 \leq p \leq 1$ 、 $0 \leq q \leq 1$ の範囲でもこの直角三角形 (これを、ここでは超三

角形と呼ぶものとする.) は成り立つとすると, 超三角形の面積 s は,

$$s = \frac{1}{2pq} \quad (5)$$

と表される. そこで, 直角三角形の範囲で, この超三角形の面積 s を考えると,

$$\lim_{p \rightarrow 0} P(p, q) = P(\rightarrow 0, \rightarrow 1) \quad (6)$$

となり, これは,

$$x = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} = \infty \quad (7)$$

$$y = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{q} = \rightarrow 1 \quad (8)$$

を意味する. ここに, (8)式右辺の $\rightarrow 1$ は, 限りなく 1 に近づくということを表すものであり, 極限の表記を厳密化したものである. つまり, (8)式は, 中辺が q を限りなく 1 に近づけることを意味する表記であって, その結果, 中辺の分数関数の値はどこまでも限りなく 1 に近づくということを表しているのが右辺ということになる. つまり, 従来の表記

$$y = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{q} = 1 \quad (9)$$

は, 中辺と右辺の等価性が厳密には成立していないと考える. (9)式の中辺は, あくまでも動的な状態を表している数 (以下, これを動数という.) であり, 右辺は定まった数, 謂わば, 静数であって厳密には等しくないと言える. そこで, (9)式のような厳密性を欠いた表記に対して(8)式の表記を用いることで, 厳密化を図った. この意味で(7)式は, 厳密表記であり得, そして, 無限「 ∞ 」をどんなに大きな正定数 m よりも大きな正数 M に対して $M < \infty$ が成り立つものとして定義すれば, (7)式は動数である中辺に対して, 右辺が「 ∞ 」と表記されており, 「 ∞ 」が動数であることから「動数=動数」という関係が成り立っていると言える. (6)式もこの意味で $P(\rightarrow 0, \rightarrow 1)$ という表記を採ることで, $P(0, 1)$ と区別している. 蛇足ながら, この表記を用いれば, 従来式表記の

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

は,

$$\frac{1}{\infty} = \rightarrow 0$$

と改められる. 話を元に戻そう. 直角三角形の範囲で, この超三角形の面積 s を考えると,

$$s = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ q \rightarrow 1}} \frac{1}{2pq} = \infty \quad (10)$$

となって, 幾らでも大きな面積となることが示される. 次に, 超三角形の面積 s を, 接点 $P(1, 0)$ と $P(0, 1)$ の 2 点において求めると, それぞれ

$$(1, 0) \Rightarrow s = \frac{1}{2pq} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 0} = \frac{1}{0} = 0 \quad (11)$$

$$(0,1) \Rightarrow s = \frac{1}{2pq} = \frac{1}{2 \cdot 0 \cdot 1} = \frac{1}{0} = 0 \quad (12)$$

となって、接点 $P(1,0)$, $P(0,1)$ の超三角形は、何れも $P(0,1)$, $P(1,0)$ の点に縮退して面積 s がゼロとなり、最早それは三角形ではなくなっていることを示していることが判る。勿論、このとき、(2)式から接線の方程式はそれぞれ、

$$(1,0) \Rightarrow x = 1 \quad (13)$$

$$(0,1) \Rightarrow y = 1 \quad (14)$$

である。Fig. 2 および Fig. 3 参照。

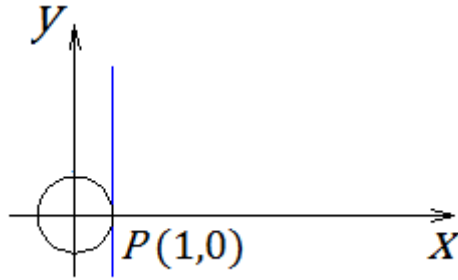


Fig. 2 接点 $P(1,0)$ に縮退した超三角形

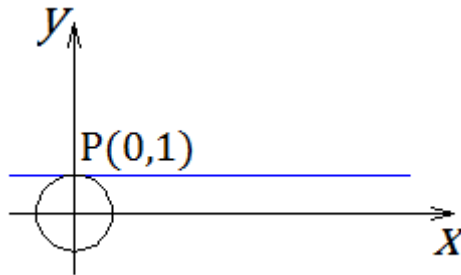


Fig. 3 接点 $P(0,1)$ に縮退した超三角形

2. x 切片の移動速度 v について

ところで、接点 $P(p,q)$ が単位円 $y^2+x^2=1$ 上に沿って、 $P(1,0)$ から $P(0,1)$ に向かって原点 O を中心とする角速度 $\omega = \pi/2$ で移動するとしよう。また接線と x 軸との交点、即ち x 切片を $Q(1/p,0)$ とすると、交点 Q が原点 O から正の向きに離れる速度 v (以下、 x 切片速度という) は、時間を t [sec] とすると、

$$x = \frac{1}{p} = \frac{1}{\cos \omega t} \quad (15)$$

であるから、この両辺を時間 t で微分すると、

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\cos \omega t} = \omega \frac{\sin(\omega t)}{\cos^2(\omega t)} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \quad (16)$$

と表される。Fig. 4 参照。

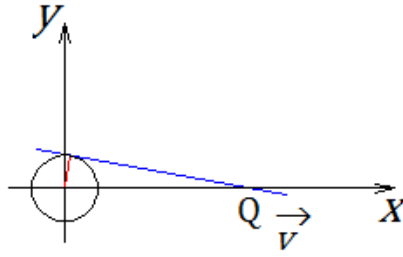


Fig. 4 交点速度 v

勿論，接点 $P(p,q)$ が座標 $(1,0)$ を出発して座標 $(0,1)$ に到達するのは， $\theta = \omega t$ であるから，

$$t = \frac{\theta}{\omega} \quad (17)$$

であって， $\theta = R$ （一直角： x 軸と y 軸との間の角），角速度 $\omega = \pi/2$ である．従って，

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\pi/2}{\pi/2} = 1 \quad (18)$$

を得る．

つまり，このケースでは，交点 $Q(1/p,0)$ が座標 $(1,0)$ を出発して， x 軸上を移動して， $(1 \rightarrow 0,0)$ としながら x 値を無限に増大させて，無限の彼方（超無限）に達するのに要する時間は 1 秒間ということになる．

さらに，(16)式において $t=1$ [sec] とすることによって，1 秒後には， x 切片速度 v は，

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right)} = \frac{\pi \cdot 1}{2 \cdot 0^2} = \frac{\pi/2}{0} = \frac{\omega}{0} = 0 \cdots \omega \quad (19)$$

となる（ここに， $\cdots \omega$ は，剰余項を意味し，可減集合論的零除算による）．これは，無限大から超無限に達した瞬間の交点 Q の x 軸上を移動する速度，即ち， x 切片速度 v は，ゼロであることを示している．と同時に，剰余速度 $\mu = \omega$ が残存することを示している．ただし，剰余速度 μ は x 軸上を移動していた Q 点が x 軸上での速度を消失し，その瞬間，単位円上の P 点に剰余速度 ω が残存することを意味していると考えるのが自然である．また，このことは，単位円上では， P 点の角速度 ω が保存されていることに対応していると考えられ，同時に，角運動量保存の法則が成り立っていると言ってよいであろう．□