2014年3月18日

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

零除算

0/0＝0の証明（可減集合編）

定義：A,Bを実数とするとき，除算B/Aの演算を，以下で定義する．

$$|B|-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=0 \quad (0\leqq a)\ (A,B,a\in\mathrm{R})$$

において，$B_0=B$，$A_j=A$　$(j=0,1,2,\cdots)$として，可減漸化式$B_j-A_{j+1}=B_{j+1}$におけるA_{j+1}（このA_{j+1}を第$j+1$可減数と呼ぶ）を元とする集合を第$j+1$可減数集合$\{A_{j+1}\}$とし，B_j（このB_jを第j被可減数と呼ぶ）が$B_j>B_{j+1}\geqq 0$を満たすとき，$\{A_{j+1}\}\neq\emptyset$．満たさないとき，$\{A_{j+1}\}=\emptyset$として，全ての可減数集合$\{A_{j+1}\}$を要素とする集合を可減集合$\{A\}$とする．

ここに，Bは被除数，Aは除数，$|\{A\}|$は可減集合$\{A\}$の要素数$|\{A\}|$であってB/Aの商であり，aは剰余であって，$|\{A\}|$を最大化したときにとり得る非負最小実数である．

このとき，次の定理が成り立つ．

定理１：0/0＝0が成り立つ．

証明：定義$|B|-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=0$より，$B=0\Rightarrow a=0$.

従って，$0-(|\{A\}|\cdot|A|+0)=0-|\{A\}|\cdot|A|=0$.

ここで，$A=0\Rightarrow 0-|\{A\}|\cdot|A|=0-|\{A\}|\times 0=0$.

さて，$B=B_0=0\wedge A=A_j=0$故に，可減漸化式$B_j-A_{j+1}=B_{j+1}$は$0-0=0$であって$B_j>B_{j+1}\geqq 0$は満たさない．よって，可減集合$\{A\}=\{\{A_1\},\{A_2\},\cdots,\{A_j\},\cdots\}=\{\emptyset,\emptyset,\cdots,\emptyset,\cdots\}=\emptyset$であり，要素数$|\{A\}|=|\emptyset|=0$を得る．従って，$A=B=0\Rightarrow B-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=0-(0\times 0+0)=0$.　∴　$0/0=0$.

100/0＝0の証明（可減集合編）

定理２：除算B/Aにける$A=0$の商は0で，余りはBとなる．

証明：$B>0$のとき，定義$|B|-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=0$より，$A=0$ならば，$B=B_0>0\wedge A=A_j=0$

故に，可減漸化式$B_j-A_{j+1}=B_{j+1}$は，

$$B_0-0=B_0=B_1$$
$$B_1-0=B_1=B_2$$
$$\cdots$$
$$B_j-0=B_j=B_{j+1}$$

であって，$B_j>B_{j+1}\geqq 0$は満たさない．

よって，可減集合$\{A\}=\{\{A_1\},\{A_2\},\cdots,\{A_j\},\cdots\}=\{\emptyset,\emptyset,\cdots,\emptyset,\cdots\}=\emptyset$であり，要素数$|\{A\}|=|\emptyset|=0$を得る．従って，

$$|B|=|\{A\}|\cdot|A|+a=|\emptyset|\cdot|0|+a=0\times 0+a=a$$

が成り立つ．

これより，$B>0\Rightarrow a\neq 0$が成り立つ．ここで，$A=0\Rightarrow$商$|\{A\}|=0$，且つ，余り$a=B$であって，明らかに，aは$|\{A\}|$を最大化した際の非負最小数であるから$B\neq 0$における除算B/Aにける$A=0$の商$|\{A\}|$は0で，余りaはBとなる．勿論，$B=0\Rightarrow a=0$が成り立つ．□

ここで，上記定義には，少なくともAとBの何れか一方が負数となるケースを意図的に外して謂わば，四半平面（第一象限）のみを考慮した．そこで，これらの様な負数を含む場合の拡張定義と，そ

の効果を以下に示す．

拡張定義：A 及び／又は B を負数の実数とするとき，除算 B/A の演算を，以下で定義する．

$$商 = \frac{|A|}{A}\frac{|B|}{B}|\{A\}| \qquad 剰余項 = \frac{|B|}{B}a$$

以上で置き換えれば，結果は以下のようになる．

各ケースにおける商の符号等は，

ｉ．$A=-\alpha<0 \wedge B=\beta>0$,

$$商 = \frac{|A|}{A}\frac{|B|}{B}|\{A\}| = \frac{|-\alpha|}{-\alpha}\frac{|\beta|}{\beta}|\{A\}| = -\frac{\alpha}{\alpha}\frac{\beta}{\beta}|\{A\}| = -|\{A\}|$$

ⅱ．$A=\alpha>0 \wedge B=-\beta<0$,

$$商 = \frac{|A|}{A}\frac{|B|}{B}|\{A\}| = \frac{|\alpha|}{\alpha}\frac{|-\beta|}{-\beta}|\{A\}| = -\frac{\alpha}{\alpha}\frac{\beta}{\beta}|\{A\}| = -|\{A\}|$$

ⅲ．$A=-\alpha<0 \wedge B=-\beta<0$,

$$商 = \frac{|A|}{A}\frac{|B|}{B}|\{A\}| = \frac{|-\alpha|}{-\alpha}\frac{|-\beta|}{-\beta}|\{A\}| = \frac{\alpha}{\alpha}\frac{\beta}{\beta}|\{A\}| = |\{A\}|$$

ⅳ．$A=0$,

$$商 = \frac{|A|}{A}\frac{|B|}{B}|\{A\}| = \frac{|0|}{0}\frac{|\beta|}{\beta}|\{A\}| = 0 \times 1 \times |\{A\}| = 0 \times |\{A\}|$$

ｖ．$B=0$,

$$商 = \frac{|A|}{A}\frac{|B|}{B}|\{A\}| = \frac{|\alpha|}{\alpha}\frac{|0|}{0}|\{A\}| = 1 \times 0 \times |\{A\}| = 0 \times |\{A\}|$$

ⅵ．$A=0 \wedge B=0$,

$$商 = \frac{|A|}{A}\frac{|B|}{B}|\{A\}| = \frac{|0|}{0}\frac{|0|}{0}|\{A\}| = 0 \times 0 \times |\{A\}| = 0 \times |\{A\}|$$

となる．また，各ケースにおける剰余項の符号等は，

Ⅰ．$A=\alpha>0 \wedge B=\beta>0$

$$剰余項 = \frac{|B|}{B}a = \frac{|\beta|}{\beta}a = \frac{\beta}{\beta}a = a$$

Ⅱ．$A=-\alpha<0 \wedge B=\beta>0$

$$剰余項 = \frac{|B|}{B}a = \frac{|\beta|}{\beta}a = \frac{\beta}{\beta}a = a$$

Ⅲ．$A=\alpha>0 \wedge B=-\beta<0$

$$剰余項 = \frac{|B|}{B}a = \frac{|-\beta|}{-\beta}a = -\frac{\beta}{\beta}a = -a$$

Ⅳ．$A=-\alpha<0 \wedge B=-\beta<0$

$$剰余項 = \frac{|B|}{B}a = \frac{|-\beta|}{-\beta}a = -\frac{\beta}{\beta}a = -a$$

Ⅴ．$A=0 \wedge B=\pm\beta\neq 0$

$$剰余項 = \frac{|B|}{B}a = \frac{|\pm\beta|}{\pm\beta}a = \pm 1 \times a = \pm a$$

Ⅵ．$A\neq 0 \wedge B=0$

$$剰余項 = \frac{|B|}{B}a = \frac{|0|}{0}a = 0 \times a = 0$$

Ⅶ．$A=0\wedge B=0$

$$剰余項=\frac{|B|}{B}a=\frac{|0|}{0}a=0\times a=0$$

となる．

補題１：除算 B/A において，$A>B=0$ の場合

定義より，

$B=B_0=0\wedge A=A_j>0$ であり，

可減漸化式 $B_j-A_{j+1}=B_{j+1}$ は

$B_0-A_1=0-A=B_1$

$B_1-A_2=-A-A=-2A=B_2$

・・・

$B_j-A_{j+1}=-(j+1)A=B_{j+1}$

であって $B_j>B_{j+1}\geqq 0$ は満たさない．

よって，可減集合$\{A\}=\{\{A_1\},\{A_2\},\cdots,\{A_j\},\cdots\}=\{\emptyset,\emptyset,\cdots,\emptyset,\cdots\}=\emptyset$であり，要素数$|\{A\}|=|\emptyset|=0$ を得る．従って，

$A>B=0$ のとき，$0-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=0-(|\emptyset|\cdot|A|+a)=0-(0\times|A|+a)=0-(0+a)=0$

$\therefore\quad a=0.$

これより，$A>B=0\Rightarrow$商$|\{A\}|=0$，余り $a=0$ が成り立つ．□

補題２：除算 B/A において，$A>B>0$ の場合

定義より，

$0<B=B_0<A=A_j$ であり，

可減漸化式 $B_j-A_{j+1}=B_{j+1}$ は

$B_0-A_1=0-A=B_1$

$B_1-A_2=-A-A=-2A=B_2$

・・・

$B_j-A_{j+1}=-j\,A-A=-(j+1)A=B_{j+1}$

であって $B_j>B_{j+1}\geqq 0$ は満たさない．

よって，可減集合$\{A\}=\{\{A_1\},\{A_2\},\cdots,\{A_j\},\cdots\}=\{\emptyset,\emptyset,\cdots,\emptyset,\cdots\}=\emptyset$であり，要素数$|\{A\}|=|\emptyset|=0$ を得る．従って，

$A>B>0$ のとき，$B-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=B-(|\emptyset|\cdot|A|+a)=B-(0\times|A|+a)=B-(0+a)=B-a=0$

$\therefore\quad B=a$

を得る．これより，$A>B>0\Rightarrow$商$|\{A\}|=0$，余り $a=B$ が成り立つ．□

補題３：除算 B/A において，$B>A=0$ の場合

定理２によって証明されている．□

補題４：除算 B/A において，$B>A>0$ の場合

定義より，被除数 B は，$B=kA+b$（ただし，$k\in\mathbb{N}$，$0\leqq b<A$）と表される．

これを用いれば，$B_0=B=kA+b$ であるから可減漸化式 $B_j-A_{j+1}=B_{j+1}$ は，

$B_0-A_1=(kA+b)-A=\{(k-1)A+b\}=B_1$

$B_1-A_2=\{(k-1)A+b\}-A=\{(k-2)A+b\}=B_2$

・・・

$B_{k\text{-}1}-A_k=(A+b)-A=b=B_k$

$B_k-A_{k+1}=b-A=B_{k+1}<0$

であって，仮定より明らかに，$B_0>B_1>\cdots>B_{k\text{-}1}>B_k\geqq 0$ が成り立ち，且つ，$B_k>B_{k+1}\geqq 0$ は満たさない．
これより，可減数集合$\{A_{j+1}\}$は，

$\{A_1\}\neq\emptyset\wedge\{A_2\}\neq\emptyset\wedge\cdots\wedge\{A_k\}\neq\emptyset\wedge\{A_{k+1}\}=\emptyset\wedge\{A_{k+2}\}=\emptyset\wedge\cdots$

であるから，可減集合$\{A\}$は，

$\{A\}=\{\{A_1\}\neq\emptyset, \{A_2\}\neq\emptyset,\cdots, \{A_k\}\neq\emptyset, \{A_{k+1}\}=\emptyset, \{A_{k+2}\}=\emptyset,\cdots\}$

であり，可減集合$\{A\}$の要素数$|\{A\}|$は明らかに，

$|\{A\}|=k$

となる．即ち，除算 B/A における商は，k となり，仮定に一致する．
この結果を定義に当て嵌めれば，

$|B|-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=B-(kA+a)=(kA+b)-(kA+a)=b-a=0$

$\therefore\quad a=b\quad(0\leqq b<A)$

が成り立つ．
ここで，$b=0$ ならば，明らかに B は，A の整数倍の正実数であって剰り a が 0 であり，$b>0$ ならば，B は，A で割ると剰り a が b となることを意味する．□

補題５：除算 B/A において，$A=B=0$ の場合
定理１によって証明されている．□