2016年2月14日
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

剰余式ゼロ除算

非負実数として，被除数 a，除数 b，商 c，一般剰余 d は，

$$\frac{a}{b} = c \cdots d \qquad (1)$$

と表される．ただし，一般剰余 d は，$0 \leqq d \leqq a$ を満たし，c を最大化した際の非負最小値をとり，特に，$b \neq 0$ ならば，$0 \leqq d < b$ を満たす．さて，(1)式はまた，

$$a = b \times c + d \qquad (2)$$

と表される．ここで，(2)式の両辺から d を減じ，更に，両辺を b で除すことで，

$$\frac{a-d}{b} = \frac{b}{b} \cdot c \qquad (3)$$

のように変形を加える．なお，ここでは $0/0 \neq 1$ であると考えられ，約分可能なのは $b/b = 1$ であることから敢えて約分しないこととする．

ここで，$b = 0$ とすると，(2)式より，$a = d$ である．従って，(3)式は，左辺が，

$$\frac{a-d}{b} = \frac{a-a}{0} = \frac{0}{0} \qquad (4)$$

であって，右辺が

$$\frac{b}{b} \cdot c = \frac{0}{0} \cdot c \qquad (5)$$

であるから(4)式と(5)式より，

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{0} \cdot c \qquad (6)$$

を得るので，

$$(c-1)\frac{0}{0} = 0 \qquad (7)$$

と変形し，$c \neq 1$ を前提として，両辺を $c-1$ で除し，

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{c-1} \qquad (8)$$

と変形すると，

$$\frac{0}{0} = 0 \qquad (9)$$

を得る．なお，(1)式において，$a = d = 0$ であるとすると，(9)式との比較から $c = 0$ となるが，これは，$c \neq 1$ とする前提と矛盾しない．他方，$a = d \neq 0$ であるとすると，d は，d がとり得る値としての最大値であることから，このとき c がとり得るのは，非負最小値ということになる．これより，$c = 0$ を得るが，勿論これも $c \neq 1$ とする前提と矛盾しない．□