2014年8月3日

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

零除算と極限

$a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ を満たす a に対して，n を適当な大きさの実数として，a の0除算

$$\frac{a}{0} = \frac{a}{0} \times 1 = \frac{a}{0} \times \frac{1/n}{1/n} = \frac{a}{0} \times \frac{m}{m}$$

を考える．上式において，n の極限を考える．即ち，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a}{0} \times \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a \times 1/n}{0 \times 1/n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a/n}{0} = \frac{0}{0} = 0$$

及び，

$$\lim_{m \to 0} \frac{a}{0} \times \frac{m}{m} = \lim_{m \to 0} \frac{a \times m}{0 \times m} = \lim_{m \to 0} \frac{am}{0} = \frac{0}{0} = 0$$

を得る．ただし，上記最後の等式は $0/0 = 0$ を用いている．

ここで，$1/n = m$ として，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/n}{1/n} = \lim_{m \to 0} \frac{m}{m} = 1$$

であって，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/n}{1/n} = \lim_{m \to 0} \frac{m}{m} \neq \frac{0}{0}$$

であることに注意する．

つまり，極限系は保形系であって，極限においてもその比は変化しないが，極限に対して不連続となる $0/0 = 0$ などの0除算においては区別が必要となることを示している．また，上記結果は，a が如何なる実数であっても，a の0除算，即ち，$a/0$ は，$0/0 = 0$ に限りなく接近するということを示している．しかしながら厳密には、極限と定点とには，ギャップがあることに注意を要する．

参考：$y = f(x) = x$ を x について微分すると，

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

であることからも上記零除算における極限が妥当であることが判る．