2016.3.1

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

正接とゼロ除算

定理　a を任意の実数とするとき，

$$\tan\frac{\pi}{2}=\frac{a}{0}=0$$

が成り立つ.

証明　xy 座標系において，原点 O を中心とした 0 より大きい半径 r_1，r_2 の同心円 C_1，C_2 を描く（Fig.1 参照）. 円 C_1 の円周上の点 $P_1(a_1,b_1)$をとり，原点 O を中心として，x 軸からの動径角 θ の線分 OP を引き，その延長線と円 C_2 との交点を点 $P_2(a_2,b_2)$とする．ただし，Fig.1 からも明らかであるが，$r_1 \leqq r_2$ と考えてよい．従って，$\Delta r = r_2 - r_1 \geqq 0$ とおける.

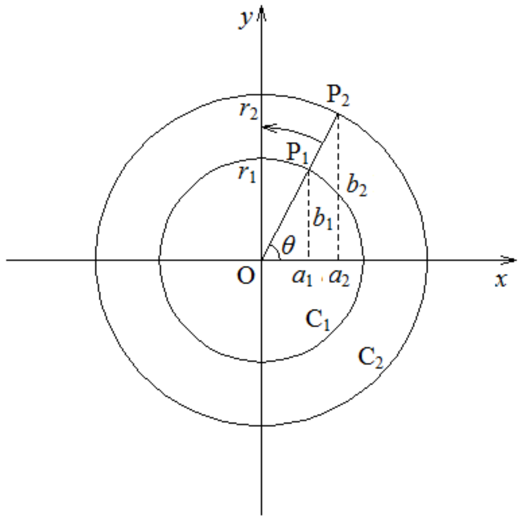

Fig.1

このとき，

$$\tan\theta=\frac{b_1}{a_1} \qquad (1)$$

$$\tan\theta=\frac{b_2}{a_2} \qquad (2)$$

が成り立つ．ここで，$\theta=\pi/2$ とすると，明らかに，$b_1=r_1 \land b_2=r_2$であるから，(1)，(2)式は，それぞれ

$$\tan\theta=\frac{b_1}{a_1}\Rightarrow\tan\frac{\pi}{2}=\frac{r_1}{0} \qquad (3)$$

$$\tan\theta = \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{2} = \frac{r_2}{0} \qquad (4)$$

と表される．従って，(3)，(4)式より，明らかに，

$$\tan\frac{\pi}{2} = \frac{r_1}{0} = \frac{r_2}{0} \qquad (5)$$

であるから，

$$\frac{r_2}{0} - \frac{r_1}{0} = \frac{1 \cdot r_2}{0} - \frac{1 \cdot r_1}{0} = \frac{1}{0}r_2 - \frac{1}{0}r_1 = \frac{1}{0}(r_2 - r_1) = \frac{1}{0}\Delta r = \frac{\Delta r}{0} = 0 \qquad (6)$$

を得る．ここで，$\mathit{\Delta} r \geqq 0$ を満たせば，$\mathit{\Delta} r$ は任意であって，(6)式の辺々に－1 を乗じても(6)式は成り立つから実数 a に対して，

$$\frac{a}{0} = 0 \qquad (7)$$

が成り立つ．故に，

$$\tan\frac{\pi}{2} = \frac{a}{0} = 0$$

を得る．□