2016.3.18
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

一般三角関数とゼロ除算

本来であれば，先に定義し，その後，定理を述べ，そして証明するという手順で進めるべきであるが，定義については以下の証明の中で詳述するものとする．従って，次の定理の主張は，証明の中の定義を援用する．

定理１　xy 座標において，原点 O から延びる一定の動径 r の，x 軸からの動径角を θ とする拡張された一般余弦関数 $\cos_r \theta$ について，

$$\cos_r 0 = \begin{cases} 0 & (r = 0) \\ 1 & (r \neq 0) \end{cases}$$

の関係が成り立つ．

証明　xy 座標において，原点 O から延びる一定半径 r について，x 軸からの動径角を θ とすると，この余弦は，

$$\cos \theta_r = \frac{x_r}{r} \qquad (1)$$

と表される．ここで，$r \neq 0$ として，θ_r を $0 \leqq \theta_{r\neq 0} = \pi/2 \vee 3\pi/2 < 2\pi$ とすれば，$x_{r\neq 0} \neq 0$ であるから，

$$\cos \theta_{r\neq 0} = 0 \qquad (2)$$

であり，また，θ_r を $0 \leqq \theta_{r\neq 0} = 0 < 2\pi$ とすれば，

$$\cos \theta_{r\neq 0} = \cos 0 = 1 \qquad (3)$$

である．ところが，$r = 0 \Rightarrow x_{r=0} = 0 \wedge \theta_{r=0} = 0$ であるから，(1)式において，$r = 0$ とすると，左辺は，

$$\cos \theta_r = \cos \theta_0 = \cos 0 \qquad (4)$$

となり，右辺は，

$$\frac{x_r}{r} = \frac{x_0}{0} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (5)$$

となる．なお，(5)式の結果は，ゼロ除算の基本定理 $0/0 = 0$ による．従って，(4)式と(5)式の結果から，

$$\cos \theta_{r=0} = \cos 0 = 0 \qquad (6)$$

が成り立つ．つまり，(3)式と(6)式から

$$\cos 0 = \begin{cases} 0 & (r = 0) \\ 1 & (r \neq 0) \end{cases} \qquad (7)$$

が言える．ところで，(4)式，(5)式，(6)式は，

$$[\![\cos\theta_r]\!]_{r=0} = \left[\!\!\left[\frac{x_r}{r}\right]\!\!\right]_{r=0} = 0 \qquad (8)$$

を主張するものであって，(8)式は，ゼロ余弦関数（cos0）の値が 0 と 1 の二値をとり得るように見受けられるが, 実際には, この関数値が 0 をとるのか 1 をとるのかということは, θ の値だけでなく, θ に対して一次独立した動径 r にも依存していて一変数ではないと考えてよい．また，θ は，r に従属するケースが在ることから，θ_r という表記は，次の点で不都合であると考えられる．即ち，

$$\theta_{r=0} = \theta_0 = 0 \qquad \text{(a)}$$

とした場合，(a)式の結果としての最右辺の 0 だけを見ると，r＝0 の場合なのか，それとも r≠0 の場合なのか判断できないのである．そこで，結果にも添え字を付して r の痕跡を残して由来の判別を可能とすると，

$$\theta_{r=0} = \theta_0 = 0_0 \qquad \text{(b)}$$

となる．(b)式の表記法を用いたならば，(b)式の結果としての最右辺の 0_0 だけを見て，r＝0 の場合なのか, それとも r≠0 の場合なのか判断できるという一定の合理性が出るものの, あたかも 0 に種類が有るかのような印象を与え得る．

以上のことから，三角関数は，これまで θ を変数とする一変数関数として捉えられてきたものの，実際には，r と θ の二変数関数であって，この意味では，これまでの三角関数は，r≠0 という条件の場合のみを扱ってきたことになり，従って，変数に添え字を付して非一意性の問題を回避しようとすると，幾分か不都合が生じると言える．

そこで，三角関数の表記法を，次のように拡張定義する．

即ち，動径 r，動径 r と基準線との挟角 θ に対して，正弦，余弦，正接をそれぞれ，

$$\sin_r\theta \equiv \frac{y_r}{r},\quad \cos_r\theta \equiv \frac{x_r}{r},\quad \tan_r\theta \equiv \frac{y_r}{x_r} = \frac{\sin_r\theta}{\cos_r\theta} \qquad (9)$$

と表記し，r≠0 のとき，

$$\sin_{r\neq 0}\theta \equiv \sin\theta,\quad \cos_{r\neq 0}\theta \equiv \cos\theta,\quad \tan_{r\neq 0}\theta \equiv \tan\theta \qquad (10)$$

であり，r＝0 ⇒ θ＝0 であって，このとき，

$$\sin_0\theta = \frac{y_0}{0} = \frac{0}{0} = 0,\quad \cos_0\theta = \frac{x_0}{0} = \frac{0}{0} = 0,\quad \tan_0\theta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\sin_0\theta}{\cos_0\theta} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (11)$$

である．ただし，(11)式の結果は，ゼロ除算の基本定理 0/0＝0 による．

従って，(10)式，(11)式より，θ＝0 のとき，

$$\cos_{r\neq 0} 0 = \cos 0 = 1 \wedge \cos_0 0 = 0$$

$$\therefore \quad \cos_r 0 = \begin{cases} 0 & (r = 0) \\ 1 & (r \neq 0) \end{cases} \qquad (12)$$

が成り立つ．□

定理２　xy 座標において，原点 O から延びる一定の動径 r の，x 軸からの動径角を θ とする拡張された一般正弦関数 $\sin_r\theta$ について，

$$\sin_r 0 = 0 \quad (r = 0 \vee r \neq 0)$$

の関係が成り立つ．

証明　(9)式の一般正弦関数の定義に対して，　r＝0 ⇒ θ＝0 を適用すると，(11)式より，

$$\sin_0\theta = \sin_0 0 = \frac{y_0}{0} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (13)$$

である．また，r≠0 のとき，θ=0 とすると，(10)式より，

$$\sin_{r\neq 0}\theta = \sin_{r\neq 0} 0 = \sin 0 = 0 \qquad (14)$$

である．従って，(13)式及び(14)式より，正弦関数は，r の値に依らず，θ＝0 のとき，0 となる．即ち，

$$\sin_r 0 = 0 \quad (r = 0 \vee r \neq 0) \qquad (15)$$

が成り立つ．□

定理３　xy 座標において，原点 O から延びる一定の動径 r の，x 軸からの動径角を θ とする拡張された一般正接関数 $\tan_r\theta$ について，

$$\tan_r 0 = 0 \quad (r = 0 \vee r \neq 0)$$

の関係が成り立つ．

証明　(9)式の一般正接関数の定義に対して，　r＝0 ⇒ θ＝0 を適用すると，(11)式より，

$$\tan_0\theta = \tan_0 0 = \frac{\sin_0\theta}{\cos_0\theta} \qquad (16)$$

であり，定理１及び定理２を適用すると，明らかに，

$$\frac{\sin_0\theta}{\cos_0\theta} = \frac{\sin_0 0}{\cos_0 0} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (17)$$

が成り立つ．また，r≠0 のとき，θ=0 とすると，(10)式より，

$$\tan_{r\neq 0}\theta = \tan_{r\neq 0} 0 = \sin 0 = 0 \qquad (18)$$

である．従って，(17)式及び(18)式より，一般正接関数は，r の値に依らず，θ＝0 のとき，0 となる．即ち，

$$\tan_r 0 = 0 \quad (r = 0 \vee r \neq 0) \qquad (19)$$

が成り立つ．□