2016.3.21
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

一般化オイラーの法則とゼロ除算

定義　オイラーの法則を次のように拡張定義する．即ち，

$$e_r^{i\theta} = \cos_r \theta + i \sin_r \theta$$

と表記し，右辺をそれぞれ，

$$\cos_r \theta \equiv \frac{x_r}{r},\ \ \sin_r \theta \equiv \frac{y_r}{r}$$

と定義する．ここで，$r \neq 0$ のとき，

$$\cos_{r\neq 0} \theta \equiv \cos\theta\ ,\ \ \sin_{r\neq 0} \theta \equiv \sin\theta$$

であり，$r=0\ \Rightarrow\ \theta=0$ であって，このとき，

$$\cos_0 \theta = \frac{x_0}{0} = \frac{0}{0} = 0,\ \ \sin_0 \theta = \frac{y_0}{0} = \frac{0}{0} = 0$$

である．ただし，この結果は，ゼロ除算の基本定理 0/0＝0 による拡張定義である．
以上の定義により，次の定理が成り立つ．

定理）　次の関係

$$e_r^0 = \begin{cases} 0 & (r = 0) \\ 1 & (r \neq 0) \end{cases}$$

が成り立つ．

証明）　定義

$$e_r^{i\theta} = \cos_r \theta + i \sin_r \theta \qquad (1)$$

より，$r \neq 0$ のとき，$\theta=0$ とすると，

$$\cos_{r\neq 0} \theta = \cos_{r\neq 0} 0 = \cos 0 = 1 \qquad (2)$$

であって，また，

$$\sin_{r\neq 0} \theta = \sin_{r\neq 0} 0 = \sin 0 = 0 \qquad (3)$$

であるから，(2)式及び(3)式を(1)式に代入すると，

$$e_r^{i\theta} = e_{r\neq 0}^0 = \cos_{r\neq 0} \theta + i \sin_{r\neq 0} \theta = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0 = 1 \qquad (4)$$

が成り立つ．次に，$r=0$ を考えると，$r=0\ \Rightarrow\ \theta=0$ であって，このとき，

$$\cos_r \theta = \cos_0 0 = \frac{x_0}{0} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (5)$$

であって，また，

$$\sin_r \theta = \sin_0 0 = \frac{y_0}{0} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (6)$$

であるから，(5)式及び(6)式を(1)式に代入すると，

$$e_r^{i\theta} = e_{r=0}^0 = \cos_{r=0} \theta + i \sin_{r=0} \theta = \cos_0 0 + i \sin_0 0 = 0 + 0 = 0 \qquad (7)$$

が成り立つ．

以上より，(4)式及び(7)式をまとめて，与式

$$e_r^0 = \begin{cases} 0 & (r = 0) \\ 1 & (r \neq 0) \end{cases} \qquad (8)$$

を得る．□

なお，定義より，

$$e_{r\neq 0}^{i\theta} = \cos_{r\neq 0} \theta + i \sin_{r\neq 0} \theta = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \qquad (9)$$

が言える．