2017.4.17

グラフで解する密度の原理とゼロ除算

ゼロ除算３９（密度の原理，もたらされる剰余式ゼロ除算）において検討した密度の原理をグラフ化し，グラフから密度の原理を解することは多分に有益であろう．そこで，横軸を面積，縦軸を質量とする座標系を考える．この座標系において横軸では，所定の円柱体底面 A_0 の面積 s_0 を最大とする．この横軸上において原点から円柱体底面積 s_0 までの或る面積を検討対象面積 s とし，これに対応する質量，即ち，検討対象面 A 上に在る質量 M_{in} を考える．勿論，円柱体底面 A_0 上に在る質量は全質量 M である．つまり，検討対象面積 s に対する質量 M_{in} のグラフの勾配 σ は，検討対象面積 s の関数となるから $\sigma=\sigma(s)$と表される．
ここで，この円柱体の質量分布 ρ が一様であるとすると，面積 0 を超え円柱体底面積 s_0 までの至るところにおいて，検討対象面積 s とその面積上に在る円柱体の部分質量，即ち検討対象面内質量 M_{in} とは，σ=一定として比例する．

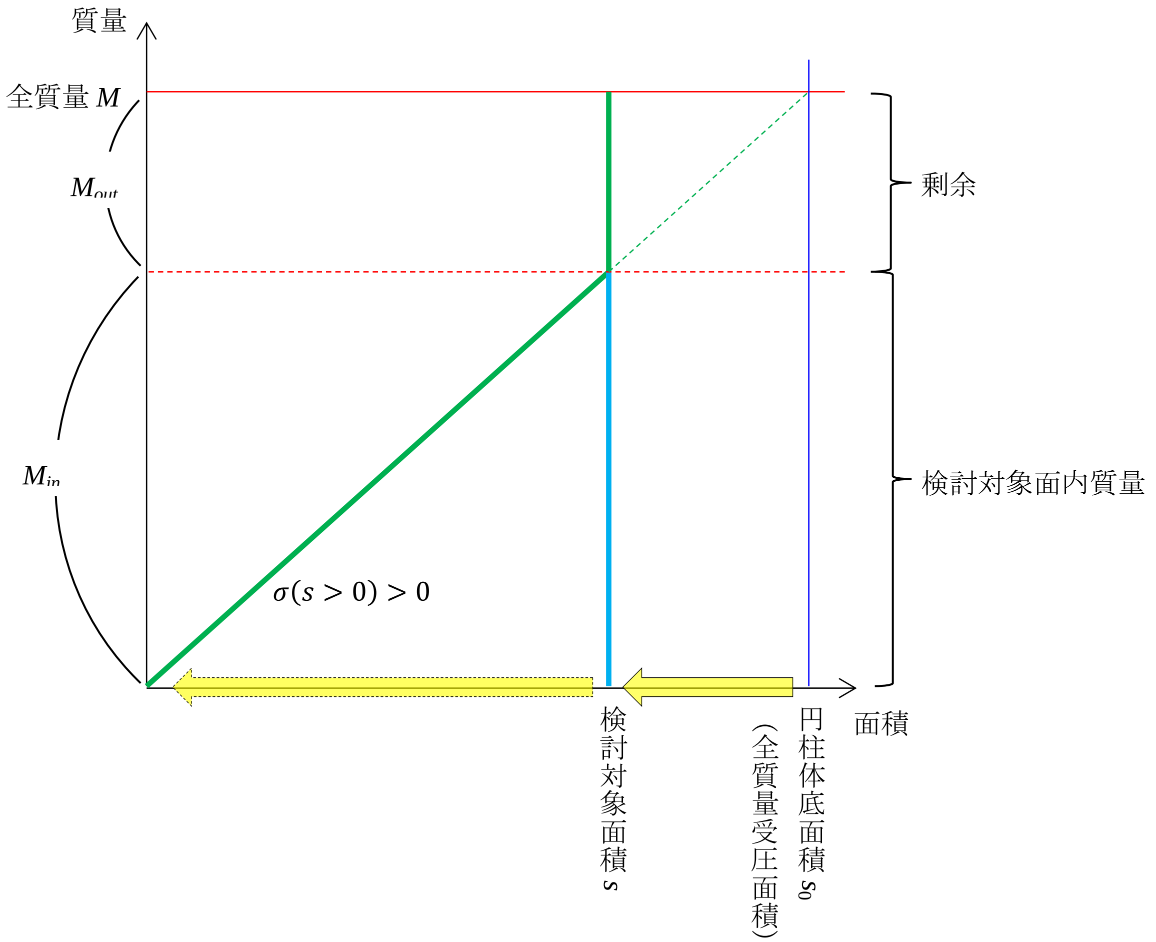

Fig.1　密度の原理とゼロ除算　$\sigma(s)$＝const＞0

さて，いま検討対象面積 s が円柱体底面積 s_0 と一致している最大面積状態から徐々に検討対象面積 s を狭めて行くことにする．適当なところまで狭めた状態を表したのが Fig.1 である．このとき，検討対象面積 s 上の質量 M_{in} は，直線の方程式 $M_{in}=\sigma s$ で与えられる．また，全質量 M は，検討対象面積 s の線形定和関数として $M=\sigma s+M_{out}$ で与えられる．

ここまでの関係を簡単にするため，円柱体底面積 s_0 を 100，全質量 M を 100，直線の傾き $\sigma=1$（$s>0$）とおいて再検討してみることにする．検討対象面積 s が円柱体底面積 s_0 と一致しているとき，検討対象面積 s に対する全質量 M の比は，

$$\frac{100}{100}=\frac{100+0}{100}=1\frac{0}{100}=1+\frac{0}{100}=1+0=1 \qquad (1)$$

というように帯分数を経由しながら 1 へと至ることが解る．このとき，ここでの帯数 1 は，σ の値である．そこで，検討対象面積 s を 1/100 だけ小さくした場合には，

$$\frac{100}{99}=\frac{99+1}{99}=1\frac{1}{99}=1+\frac{1}{99} \qquad (2)$$

というように，先と同様に帯分数を経由しながら 1 よりも僅かに大きな値になることが示される．勿論，ここでの帯数 1 も σ の値である．

このままでは，少々本質が観え辛いので，被除数，除数，商，剰余の関係を以下の通りに整理してみよう．ここで，初期の分子は被除数に，分母は除数に，帯数は商に該当し，その際の分子は剰余に相当することに注意すれば，被除数は変化しないから，

$$\frac{100}{100}=\frac{100+0}{100}=1\frac{0}{100}\Rightarrow 100=1\times100+0$$

$$\frac{100}{99}=\frac{99+1}{99}=1\frac{1}{99}\quad\Rightarrow\quad 100=1\times99+1$$

$$\frac{100}{98}=\frac{98+2}{98}=1\frac{2}{98}\quad\Rightarrow\quad 100=1\times98+2$$

$$\frac{100}{97}=\frac{97+3}{97}=1\frac{3}{97}\quad\Rightarrow\quad 100=1\times97+3$$

$$\vdots$$

$$\frac{100}{51}=\frac{51+49}{51}=1\frac{49}{51}\ \Rightarrow\ 100=1\times51+49$$

$$\frac{100}{50}=\frac{50+50}{50}=1\frac{50}{50}\ \Rightarrow\ 100=1\times50+50$$

$$\frac{100}{49}=\frac{49+51}{49}=1\frac{51}{49}\ \Rightarrow\ 100=1\times49+51$$

$$\vdots$$

$$\frac{100}{3}=\frac{3+97}{3}=1\frac{97}{3}\ \Rightarrow\ 100=1\times3+97$$

$$\frac{100}{2}=\frac{2+98}{2}=1\frac{98}{2} \ \Rightarrow \ 100=1\times 2+98$$

$$\frac{100}{1}=\frac{1+99}{1}=1\frac{99}{1} \ \Rightarrow \ 100=1\times 1+99$$

と表される．この一連の計算は，「⇒」以右の式における第１項目が Fig.1 の水色の直線（質量軸と平行）で表される面内質量 M_{in} の大きさに相当し，第２項目が緑色の直線（質量軸と平行）で表される面外質量 M_{out} の大きさ即ち剰余項に相当することを意味する．

ここで，検討対象面積 s を s＝0 とすると，

$$\frac{100}{0}=\frac{0+100}{0}=0\frac{100}{0} \ \Rightarrow \ 100=0\times 0+100 \qquad (3)$$

を得る． Fig.2 からも明らかなとおり，検討対象面積 s は 0 なので，その面内質量 M_{in} も 0 である．他方，面外質量 M_{out} は，全質量 M の全体を占めることになるので，100 である．

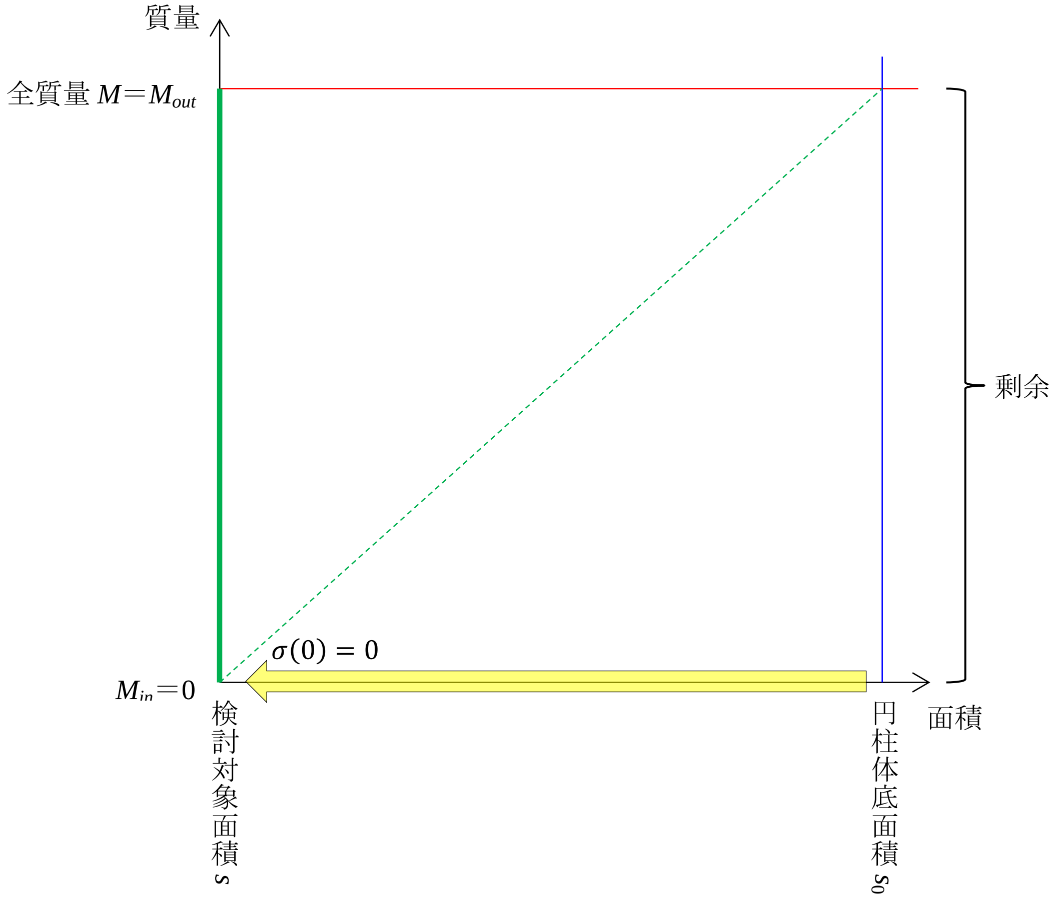

Fig.2　密度の原理とゼロ除算　$\sigma(s)$＝0

なお，(3)式においても帯数が 1 となると仮定すると，

$$\frac{100}{0}=\frac{0+100}{0}=1\frac{100}{0}=1+\frac{100}{0}=1+1+\frac{100}{0}=\infty+\frac{100}{0}=\infty\frac{100}{0}$$

$$\Rightarrow\ 100=\infty\times 0+100 \qquad (4)$$

を得ることになる．ところが，∞×0 とは，∞が 1 つも無いということを表すモノであるものの，∞が 1 つも無いからと言ってその替わりに∞×0 が幾つに定まるかは不明であって，不定である．つまり，(4)式は不合理であって等式が成立していない．これは帯数を 0 ではない如何なる実数で置き換えても同様である．これより，

$$\frac{0}{0}=1 \qquad (5)$$

は，不合理であることが示された．従って，100＝□×0+100 が成り立つのは，唯一□＝0 の場合に限ることは明らかであるから，100＝0×0+100 であって，これより，

$$\frac{0}{0}=0 \qquad (6)$$

が成り立つことは明白である．これについて以下に別証を示そう．

２つの実数$a,b\geq 0$に対して，

$$f(a,b)=f(b+(a-b),b)=f(b,b)+f(a-b,b) \qquad (7)$$

が成り立ち，

$$f(a,b)=\frac{a}{b}\quad(b\neq 0) \qquad (8)$$

とする．このとき，

$$f(a,0)=f(0+(a-0),0)=f(0,0)+f(a-0,0)=f(0,0)+f(a,0)$$

$$\therefore f(0,0)=0 \qquad (9)$$

が成り立つ．ゆえに，(6)式，

$$\frac{0}{0}=0$$

を得る．

また，２つの実数$a,b\geq 0\wedge a\geq nb\quad(n\in\mathrm{N})$ に対して，仮定より，

$$\begin{aligned}f(a,b)&=f(b+(a-b),b)=f(b,b)+f(a-b,b)=f(b,b)+f(b+\{(a-b)-b\},b)\\&=f(b,b)+f(b,b)+f\big((a-b)-b,b\big)=2f(b,b)+f(a-2b,b)=\cdots\\&=nf(b,b)+f(a-nb,b)\quad(a\geq nb) \qquad (10)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，b＝0 とすると，

$$f(a,0)=nf(0,0)+f(a-n\times 0,0)=nf(0,0)+f(a,0)\quad(a\geq nb)$$

$$\therefore f(0,0)=0 \qquad (11)$$

を得る．これより，(3)式は，

$$\frac{\text{被除数 }100}{\text{除数 }0}=\frac{\text{変換被除数 }0+\text{剰余 }100}{\text{除数 }0}=\text{商 }0\frac{\text{剰余 }100}{\text{除数 }0}$$

$$\Rightarrow \text{被除数 }100=\text{商 }0\times\text{除数 }0+\text{剰余 }100 \qquad (3')$$

というように，(6)式の結果より，帯分数形式として一意的に帯数が 0 に定まること，即ち，商が 0 に定まることが示される．ゆえに，(3)式が成り立つといえる．一般に，

$$\frac{\text{被除数}a}{\text{除数 }0}=\text{商 }0\cdots\text{剰余}a\wedge\text{被除数}a=\text{商 }0\times\text{除数 }0+\text{剰余}a \qquad (12)$$

が成り立つ．ただし，(3')の変換被除数は，元の被除数を，二次の被除数と剰余とに二数和分割するという被除数変換を施して得られる変換後の被除数である．この被除数変換の操作は，除数が 0 ではない場合には任意の二数和分割が可能であるが，除数が 0 の場合には帯分数化可能な二数和分割は一意的に変換被除数が 0 となる．つまり，除数が 0 のとき，その商は一意的に 0 になることを意味し，可減集合論的には，剰余は一意的に被除数に等しくなることを意味している．蛇足ながら，非可減集合論的には，被除数$a\neq 0$のとき，除数$b=0$とすると，$x\neq 0$として，

$$\frac{a}{0}=\frac{a}{0}\times 1=\frac{a}{0}\times\frac{x/a}{x/a}=\frac{x}{0} \qquad (a,x\neq 0) \qquad (13)$$

が成り立ち，$x=1$を思考することによって，

$$\frac{a}{0}=\frac{1}{0} \qquad (a\neq 0) \qquad (14)$$

を得る．これは，0 との比（較）では，『「有」と「無」』という謂わば定性的な２つの状態の違いのみしか表すことが出来ないことを示している．これは，分母たる基準の大きさがゼロであるから自らを基準として何等かの大きさを定量的に計量することが出来ないことを示していると言える．また，分子の大きさに違いが有った場合でもその違いを判別することが出来ないことを示している．しかし，「無」という状態とは明確に異なる「有」という状態が存在することを示しているのである．

ところで，帯分数表記を次のように，定義しておこう．
３つの実数 a,b,c を用いた分数等式を，

$$\frac{ab+c}{b}=a\frac{c}{b}=a+\frac{c}{b}\equiv a\_\frac{c}{b} \qquad (15)$$

と表記し，a を帯数，b を除数、$ab+c$を被除数，c を剰余と呼ぶものとする．
このとき，帯数 a を一般商と呼ぶことにすると，剰余 c を最小化する一般商 a は，従前の除算の商 A と同値である．即ち，

$$a_{max}\frac{c_{min}}{b}\Rightarrow(ab+c)\div b=A\cdots C \qquad (16)$$

であって，このとき，

$$a_{max} = A \wedge c_{min} = C \qquad (17)$$

が成り立つ．また，一般商 a の集合$\{a\}$と商 A，並びに，剰余 c の集合$\{c\}$と C の間には，

$$A \in \{a\}, C \in \{c\} \qquad (18)$$

の関係が成り立つ．

上記帯分数の表記法を用いると，(7)式は，

$$f(a,b) = f(b + (a-b), b) = f(b,b) + f(a-b,b) = f(b,b)\_f(a-b,b) \qquad (7')$$

と表される．ここで，(8)式の関係

$$f(a,b) = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

を設定する．このとき，b＝0とおけば，

$$f(a,0) = f(0,0)\_f(a,0) \qquad (19)$$

であって，(9)式

$$f(0,0) = 0$$

が成り立つ．このとき，(9)式の関係から(19)は，一意的に，

$$f(a,0) = 0\_f(a,0) \qquad (20)$$

と表される．また，帯分数の定義より，(20)式における帯数 0 は一般商の集合のうちの 1 つの元であり， (20)式が一意的に成り立つことからこの帯数 0 は同時に一般商の集合の中でも最大であって，従前の除算の商と同値である．よって，

$$\frac{a}{0} = 0\frac{a}{0} = 0 \cdots a \qquad (21)$$

が一意的に成り立つ．

ところで，再び横軸を面積，縦軸を質量とする座標系を考える．この座標系において横軸では，所定の円柱体底面 A_0 の面積 s_0 を最大とする．この横軸上において原点から円柱体底面積 s_0 までの或る面積の受圧面 A が一定底面の円柱体の全質量 M_{on} を受けるものとし，平坦な完全剛体の受圧面 A の受圧面積を s とする．即ち，受圧面 A に掛かる質量 M_{on} を考えるのである．勿論，円柱体底面 A_0 に掛かる質量は全質量 M に等しい．すると，受圧面積 s に対する質量 M_{on} のグラフの勾配 σ は，受圧面積 s の関数となるから σ＝$\sigma(s)$と表される．ここで，この円柱体が，質量分布 ρ 一様，完全剛体であるとすると，受圧面積 s が 0 を超え円柱体底面積 s_0 までの至るところにおいて，受圧面積 s とその面積にかかる円柱体の全質量 M，即ち受圧面に掛かる質量 M_{on} とは，σ(s)の大きさ，即ちグラフの傾き σ を変えながらの線形関係を成す．

さて，いま受圧面積 s が円柱体底面積 s_0 と一致している最大面積状態から徐々に受圧面積 s を狭めて行くことにする．適当なところまで狭めた状態を表したのが Fig.3 である．このとき，受圧面積 s に掛かる質量 M_{on} は，常に一定であって，M_{on}＝$\sigma(s)s$で与えられる．つまり，

$\sigma(s)$は s に対して反比例する．勿論，全質量 M は，受圧面 A 上の質量 M_{on} と，受圧面 A に掛からない質量，即ち，受圧面外質量 M_{off} との和で表されるから，

$$M = M_{on} + M_{off} \qquad (22)$$

が成り立つ．これより，全質量 M は，

$$M = \sigma(s)s + M_{off} \qquad (23)$$

と表すことが出来る．

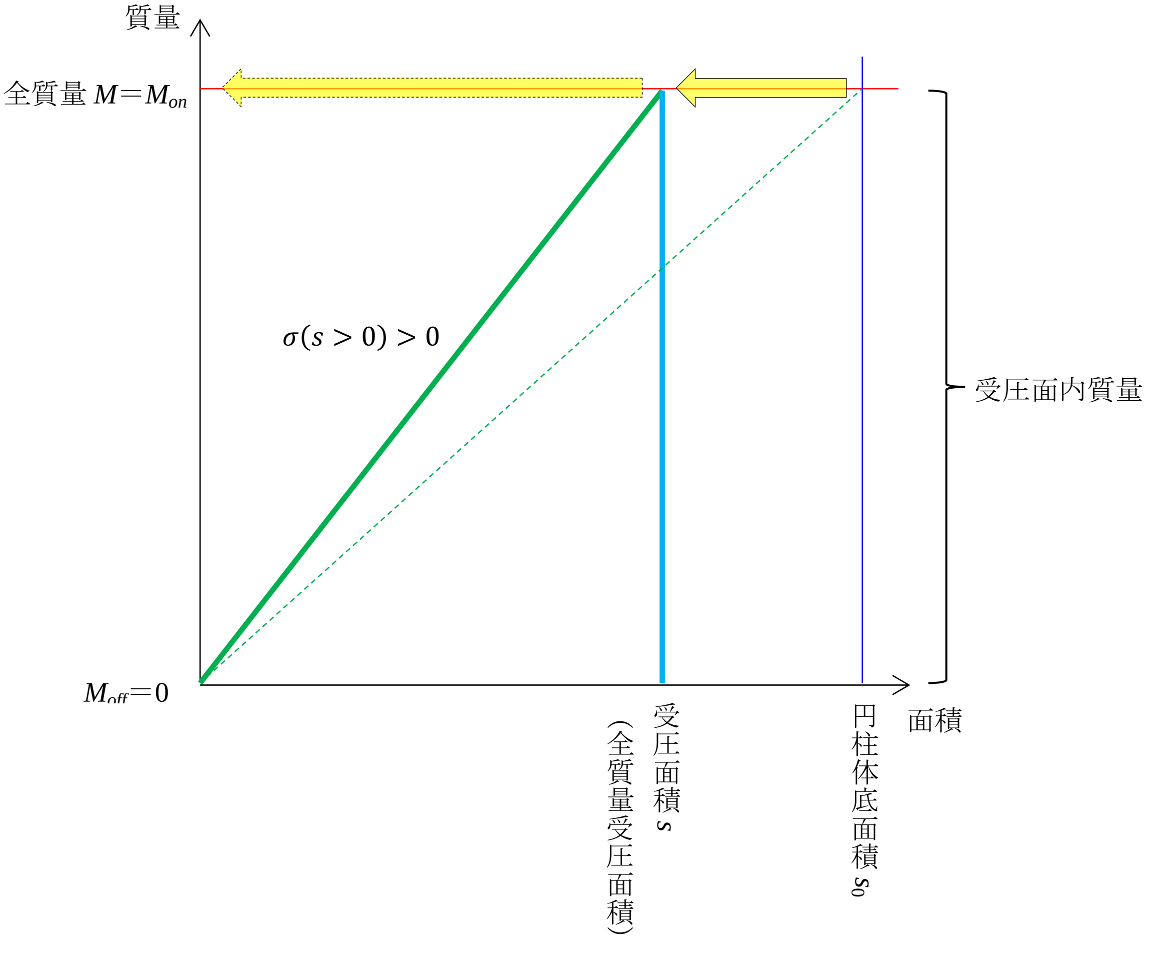

Fig.3　密度の原理とゼロ除算　$\sigma(s) \propto \frac{1}{s} > 0$

ここまでの関係を簡単にするため，円柱体底面積 s_0 を 100，全質量 M を 100，直線の傾き $\sigma(s) \geqq 1$（$s>0$）とおいて再検討してみることにする．受圧面積 s が円柱体底面積 s_0 と一致しているとき，受圧面積 s に対する全質量 M の比は，剰余を最小とする二数和分割で被除数変換を施せば，

$$\frac{100}{100} = \frac{100+0}{100} = 1\frac{0}{100} = 1 + \frac{0}{100} = 1 + 0 = 1 \qquad (24)$$

というように帯分数を経由しながら 1 へと至ることが解る．このとき，ここでの帯数 1 は，

σ の値である．そこで，受圧面積 s を 1/100 だけ小さくした場合には，

$$\frac{100}{99}=\frac{100+0}{99}=1.\dot{0}\dot{1}\frac{0}{99}=1.\dot{0}\dot{1}+\frac{0}{99}=1.\dot{0}\dot{1} \qquad (25)$$

というように，先と同様に帯分数を経由しながら 1 よりも僅かに大きな値になることが示される．勿論，ここでの帯数$1.\dot{0}\dot{1}$も σ の値である．

これらの本質を観えやすくするため，先と同様に，被除数，除数，商，剰余の関係を以下の通りに整理してみよう．ここで，初期の分子は被除数に，分母は除数に，帯数は商に該当し，その際の分子は剰余に相当することに注意すれば，被除数は変化しないから，

$$\frac{100}{100}=\frac{100+0}{100}=1\frac{0}{100} \quad \Rightarrow \quad 100=1\times100+0$$

$$\frac{100}{99}=\frac{100+0}{99}=\dot{1}.0\dot{1}\frac{0}{99} \quad \Rightarrow \quad 100=\dot{1}.0\dot{1}\times99+0$$

$$\frac{100}{98}=\frac{100+0}{98}=1.02\cdots\frac{0}{98} \quad \Rightarrow \quad 100=1.02\cdots\times98+0$$

$$\frac{100}{97}=\frac{100+0}{97}=1.02\cdots\frac{0}{97} \quad \Rightarrow \quad 100=1.03\cdots\times97+0$$

$$\vdots$$

$$\frac{100}{51}=\frac{100+0}{51}=1.96\cdots\frac{0}{51} \quad \Rightarrow \quad 100=1.96\cdots\times51+0$$

$$\frac{100}{50}=\frac{100+0}{50}=2\frac{0}{50} \quad \Rightarrow \quad 100=2\times50+0$$

$$\frac{100}{49}=\frac{100+0}{49}=2.04\cdots\frac{0}{49} \quad \Rightarrow \quad 100=2.04\cdots\times50+0$$

$$\vdots$$

$$\frac{100}{3}=\frac{100+0}{3}=33.\dot{3}\frac{0}{3} \quad \Rightarrow \quad 100=33.\dot{3}\times3+0$$

$$\frac{100}{2}=\frac{100+0}{2}=50\frac{0}{2} \quad \Rightarrow \quad 100=50\times2+0$$

$$\frac{100}{1}=\frac{100+0}{1}=100\frac{0}{1} \quad \Rightarrow \quad 100=100\times1+0$$

そして，密度の原理 0/0＝0，並びに，(21)式より，

$$\frac{100}{0}=\frac{0+100}{0}=0\frac{100}{0} \ \Rightarrow \ 100=0\times0+100 \qquad (26)$$

が一意的に成り立つ．またこれは，Fig.2 を数式で表した(3)式と全く同じ形を成している．これは，数式のみならず，Fig.4 のグラフも同様に Fig.2 と同値である．これら 2 つの系の唯一の相違点は，前者は検討対象面外質量を支持する検討対象外面が存在するが，後者に

は受圧面外質量を支持する受圧面外面が存在しないことである．この違いから，前者は検討対象面の面積をゼロとしても円柱体には何も変化は生じないが，後者では受圧面の面積をゼロとした場合，円柱体の如何なる質量も受け持つ面が存在しなくなるので，円柱体は落下することになる．

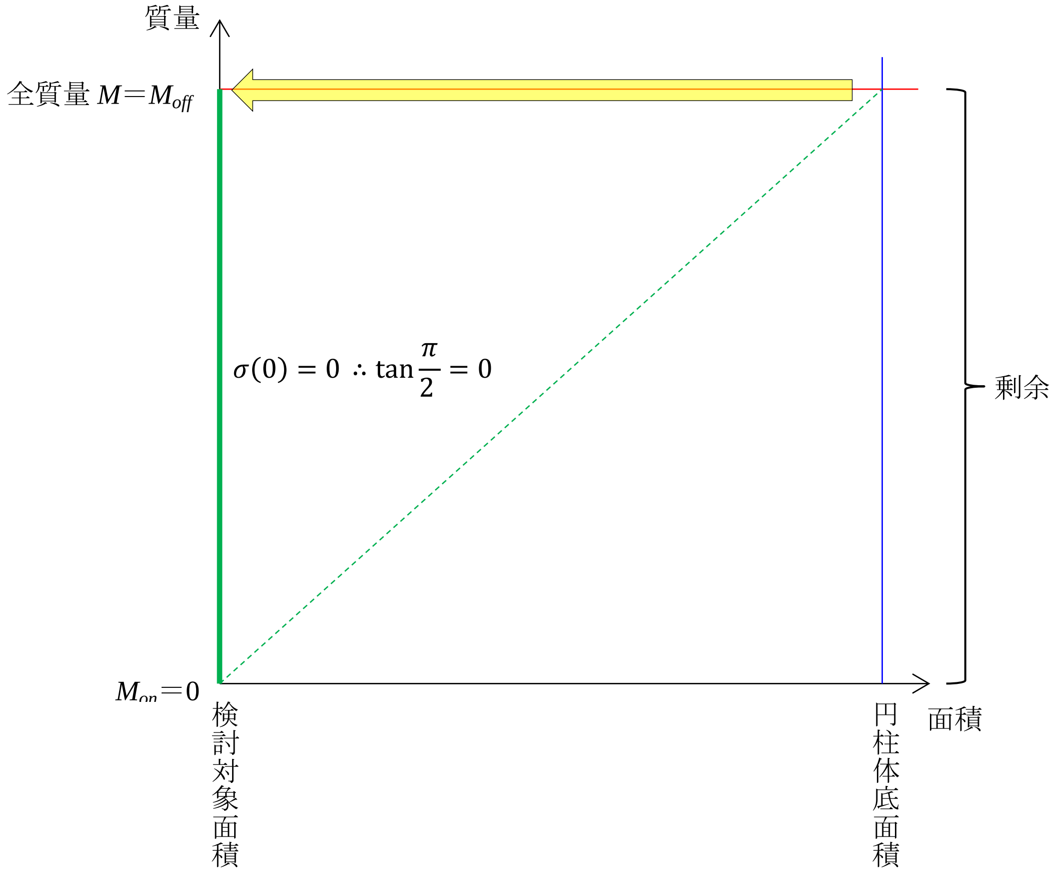

Fig.4　密度の原理とゼロ除算　$\sigma(s) = 0$

以上では，質量面密度を例に取り上げ，比とゼロ除算の関係について，密度の原理について解説してきた．これは，謂わば，比の原理と言い換えてもよい．そこで，以下に Fig.3 及び Fig.4 に見る密度の原理（比の原理）について，幾つか例を挙げて理解を深めることとしよう．先ずは，密度の原理の例を，次に比の原理の例を挙げる．

密度の原理の例として，消えゆく島の話を挙げてみよう．

その島は，総面積 100［ha］で 100［人］の住民が居る。この島の住民には生死も無く，他の地域からの入植や移住も皆無である。しかし、ひとつ問題が有った．それは，地球温暖化のため、海水位が徐々に上がってしまうことから毎年この島では、島の面積が 1［ha］ずつ減少してしまうのである．

現在の人口密度は，1［人/ha］であり，20 年後の人口密度は 1.25［人/ha］であるが，それでは 100 年後の人口密度は如何程か？

現在の人口密度

$$\frac{100\,[人]}{100\,[\mathrm{ha}]} = 1\,[人/\mathrm{ha}]\frac{0\,[人]}{100\,[\mathrm{ha}]} = 1\,[人/\mathrm{ha}]\quad 余り\ 0\,[人]$$

20 年後の人口密度

$$\frac{100\,[人]}{100-1\times 20\,[\mathrm{ha}]} = \frac{100\,[人]}{80\,[\mathrm{ha}]} = 1.25\,[人/\mathrm{ha}]\frac{0\,[人]}{80\,[\mathrm{ha}]} = 1.25\,[人/\mathrm{ha}]\quad 余り\ 0\,[人]$$

50 年後の人口密度

$$\frac{100\,[人]}{100-1\times 50\,[\mathrm{ha}]} = \frac{100\,[人]}{50\,[\mathrm{ha}]} = 2\,[人/\mathrm{ha}]\frac{0\,[人]}{50\,[\mathrm{ha}]} = 2\,[人/\mathrm{ha}]\quad 余り\ 0\,[人]$$

90 年後の人口密度

$$\frac{100\,[人]}{100-1\times 90\,[\mathrm{ha}]} = \frac{100\,[人]}{10\,[\mathrm{ha}]} = 10\,[人/\mathrm{ha}]\frac{0\,[人]}{10\,[\mathrm{ha}]} = 10\,[人/\mathrm{ha}]\quad 余り\ 0\,[人]$$

99 年後の人口密度

$$\frac{100\,[人]}{100-1\times 99\,[\mathrm{ha}]} = \frac{100\,[人]}{1\,[\mathrm{ha}]} = 100\,[人/\mathrm{ha}]\frac{0\,[人]}{1\,[\mathrm{ha}]} = 100\,[人/\mathrm{ha}]\quad 余り\ 0\,[人]$$

であるから，1［a］当たりに 1［人］が住んでいることになる. さてその 1 年後はどのような状態になっているのか. 100 年後，島は完全に海に没してしまい，最早，僅かばかりの面積も存在しなくなる. 即ち，島の総面積はゼロとなる. しかし，住民には生死も無く，移住も無いので，全住民は海に漂う海人となる. それは，元々島がなかった場合に人口密度を計算しようとするのと同じことである. つまり，島が無い海域における島の人口密度は存在しないため，そこに人が居ようとも島の人口密度という意味では，空 ϕ であって，ゼロであるのと同じことなのである. つまり，元から島が無かった場合と島が無くなった場合とでは，数学的には同値であるといえる. 従って，

100 年後の人口密度

$$\frac{100\,[人]}{100-1\times 100\,[\mathrm{ha}]} = \frac{100\,[人]}{0[\mathrm{ha}]} = 0\,[人/\mathrm{ha}]\frac{100\,[人]}{0\,[\mathrm{ha}]} = 0\,[人/\mathrm{ha}]\quad 余り\ 100\,[人]$$

となるのである.

比の原理として，ニュートリノの質量と移動速度の関係を挙げてみよう.

縦軸を粒子の静止質量m_0, 横軸をこの粒子の速度vに対応したローレンツ因子の逆数（以下, ローレンツ量と呼ぶ. ）即ち,

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

とする. 従って，速度vが，　$0 \leq v \leq c$の範囲の値をとるとすると，横軸は 0 以上 1 以下の範囲の値をとる．ここで，cは光速度である.

このグラフが原点を通るものとすると, このグラフの傾きは, Fig.5 に示す通り, 或る速度vにおける粒子の質量$m(v)$を表す．つまり,

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

である.

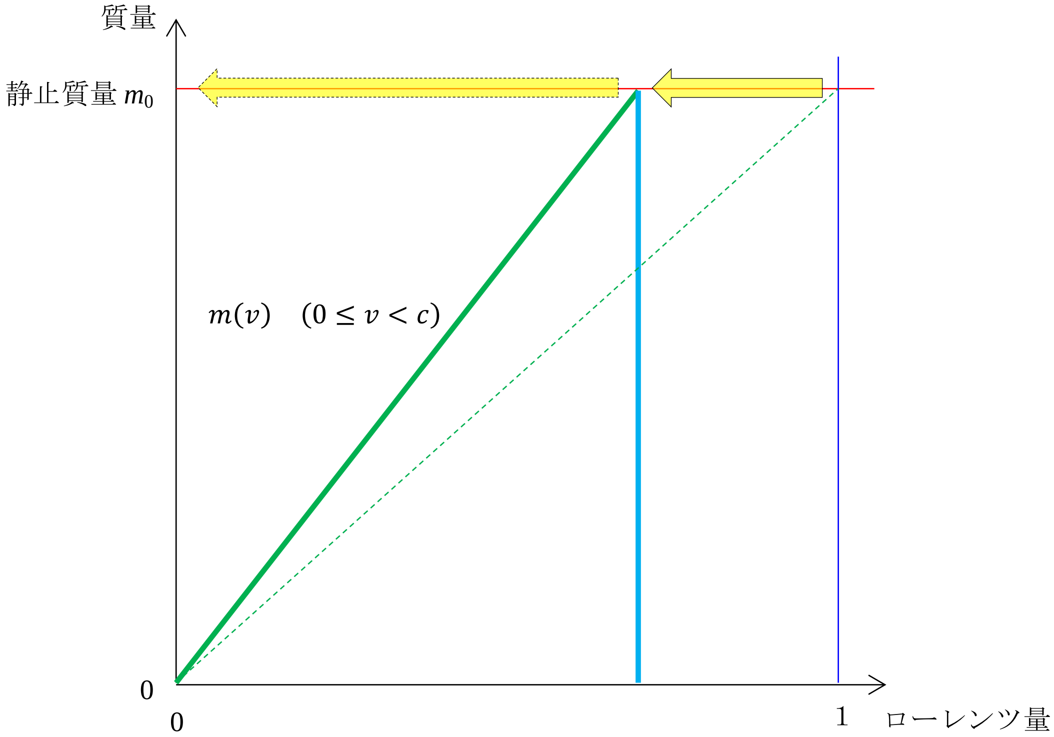

Fig.5　ニュートリノの速度vと質量$m(v)$の関係　$(0 \leq v < c)$

粒子の速度vが光速度cに一致したとき，ローレンツ量はゼロとなってグラフは縦軸と一致し，その高さは静止質量m_0に一致する.

さて，この粒子の移動速度vが光速度cのとき，その質量$m(c)$は如何程か？

粒子の移動速度 v の範囲が，$0 \leq v < c$であるとすると，

$$\text{相対論的質量}m(v) = \frac{\text{非相対論的質量}m_0}{\text{ローレンツ量}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\text{非相対論的質量}m_0 + \text{非相対論的質量 }0}{\text{ローレンツ量}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \text{相対論的質量}m(v)\_\frac{\text{非相対論的質量 }0}{\text{ローレンツ量}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \text{相対論的質量}m(v)\quad\text{余り 非相対論的質量 }0$$

であるから，v =cならば,

$$\text{相対論的質量}m(c) = \frac{\text{非相対論的質量}m_0}{\text{ローレンツ量}\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\text{非相対論的質量 }0 + \text{非相対論的質量}m_0}{\text{ローレンツ量 }0}$$

$$= \text{相対論的質量 }0\_\frac{\text{非相対論的質量}m_0}{\text{ローレンツ量 }0}$$

$$= \text{相対論的質量}m(c) = 0\quad\text{余り 非相対論的質量}m_0$$

である．従って，光速度cで移動する有質量粒子の質量$m(c)$は，相対論的効果による質量の増大分が消失し, 即ち相対論的質量$m(c)$はゼロとなって, 非相対論的質量として静止質量m_0が観測されることとなる．