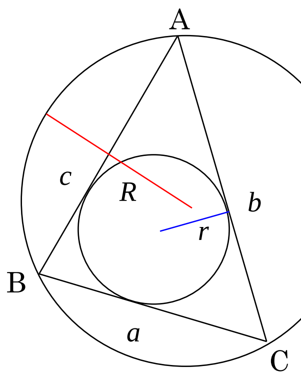
2017.7.28
道脇裕
Hiroshi Michiwaki

三角形の内接円と外接円に観るゼロ除算

下記図に示すように，各頂点 A,B,C に対する各対辺を $a,b,c$ とする△ABC の内接円の半径と外接円の半径を $r,R$ とする.




このとき，△ABC の面積を$S$として，

$$S=\frac{r}{2}(a+b+c)=\frac{abc}{4R} \qquad (1)$$

が成り立つ.

ここで, △ABCについて, 極限を超えて小さくすることを考える. 即ち, 外接円の半径$R$ ＝0とするのである．勿論，外接円の半径$R$がゼロなのだから内接円の半径$r$もゼロである．従って(1)式中辺は,

$$\frac{r}{2}(a+b+c)=\frac{0}{2}(0+0+0)=0 \qquad (2)$$

であって，(1)式右辺は,

$$\frac{abc}{4R}=\frac{0\times0\times0}{4\times0}=\frac{0}{0} \qquad (3)$$

である．従って，(1)式は，左辺，中辺，右辺の何れも△ABC の面積を表していて，外接円の半径$R$ ＝0のとき，△ABC の面積$S=0$は自明であって，　(2)式と(3)式より,

$$\frac{0}{0}=0 \qquad (4)$$

を得る.

補遺

他方，(1)式の辺々の逆数の関係式，

$$\frac{1}{\mathrm{S}} = \frac{2}{r(a+b+c)} = \frac{4R}{abc} \qquad (5)$$

を考える．$R$＝0のとき，(4)式の関係から(5)式は，

$$\frac{1}{0} = \frac{2}{0 \times (0+0+0)} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (6)$$

即ち，

$$\frac{1}{0} = 0 \qquad (7)$$

を得る．

また，ここで，△ABC について，極限を超えて大きくすることを考える．即ち，外接円の半径$R$＝$\dot{\infty}$ とするのである．すると，(5)式中辺は，

$$\frac{2}{\dot{\infty}(\dot{\infty}+\dot{\infty}+\dot{\infty})} = \frac{2}{\dot{\infty}} = 0 \qquad (8)$$

であり，(5)式右辺が，

$$\frac{4 \times \dot{\infty}}{\dot{\infty} \times \dot{\infty} \times \dot{\infty}} = \frac{\dot{\infty}}{\dot{\infty}} \qquad (9)$$

であることを考慮すれば，(8)式と(9)式より，

$$\frac{\dot{\infty}}{\dot{\infty}} = 0 \qquad (10)$$

を得る．また，(5)式と(10)式より，

$$\frac{1}{\dot{\infty}} = \frac{\dot{\infty}}{\dot{\infty}} = 0 \qquad (11)$$

であって，(7)式を勘案すると，

$$\dot{\infty} = 0 \qquad (12)$$

を得る．なお，ここでの記号$\dot{\infty}$は，真無限を意味し，無限を超えたところの点若しくは原点から真無限の点までの大きさを意味する．つまり，外接円（内接円）の半径が真無限である三角形の面積は，ゼロに等しいと考えられる．