2017.9.18

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

不動点定理と曲率とゼロ除算

定理）次の関係式,

$$\frac{0}{0}=\frac{1}{0}=0$$

が成り立つ.

また，曲率半径rを用いて，曲率μを$\mu(r)=1/r$とするとき,

$$\mu(0)=0$$

が成り立つ.

証明）原点を中心とした$0\leqq\theta\leqq 2\pi$の極座標系の適当な閉区間の円板を考えれば，角速度ωは比例係数μを用いて,

$$\omega=f(v)=\mu v \qquad (1)$$

と表される．ただし，$\mu\neq 1$とする．なお，vを周速と呼ぶものとする.

(1)式は，L.E.J.Brouwer の不動点定理によって,

$$f(v_c)=v_c \qquad (2)$$

を満たすv_cが少なくとも 1 つ存在する．仮定より，(2)式を満たすv_cは明らかに，$v_c=0$でなければならない．つまり,

$$\omega=f(0)=0 \qquad (3)$$

である.

ところで，角速度ωは，位相θの時間微分として，即ち,

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad (4)$$

と表される．また，周速vは，弧長sを用いて,

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \qquad (5)$$

と表される.

他方，(1)式は,

$$\mu=\frac{\omega}{v} \qquad (6)$$

と変形されるから，(6)式に対して(4)，(5)式を用いると,

$$\mu=\frac{\omega}{v}=\frac{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \qquad (7)$$

であって，μが曲率を表していることがわかる．従って，曲率半径をrとすると曲率$\mu(r)$は,

$$\mu = \frac{\omega}{v} = \frac{1}{r} \qquad (8)$$

と表される．これより，(1)式は,

$$\omega = f(v) = \frac{v}{r} \qquad (9)$$

と書き換えられる．

他方，（9）式は,

$$v = g(r) = r\omega \qquad (10)$$

と表すことができ，全ての角速度ωに対して，$r=0$のとき,

$$v = g(0) = 0 \qquad (11)$$

が成り立つ．従って，再び L.E.J.Brouwer の不動点定理より，この回転円板系の原点は不動点であるといえる．

以上(3)，(11)式の関係より，回転円板系(r, ω, v)の原点は不動点であって，(0,0,0)となるといえる．これより，(9)式の関係から,

$$\omega = f(0) = \frac{0}{0} = 0 \qquad (12)$$

が得られ，また(12)式の結果を(8)式に適用することによって,

$$\mu = \frac{0}{0} = \frac{1}{0} = 0 \qquad (13)$$

の関係式を得る．(13)式は，0/0＝1/0＝0，即ち 0 で割ったらどんな数も商が 0 となることを示しているだけでなく，曲率半径rが$r=0$のとき，その曲率$\mu(r)$が，$\mu(0)=0$となることを示している．□