2017.10.2
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

合同式の拡張とゼロ除算

定理）$a, b \in Z$とするとき，

$$a \equiv b(\mathrm{mod}.0) \Rightarrow a = b$$

が成り立つ．

証明）$0|a$が成り立つのは，$a = 0$のときのみである．なぜなら次の(1)式に示す可減集合論的ゼロ除算の基本定理，

$$\frac{a}{0} = 0 \cdots a \qquad (1)$$

（ただし，$\cdots a$は，aが剰余であることを意味する．）より，$\cdots a = 0$を満たすのは，$a = 0$に限るからである．よって，$a = 0$のとき，与式を満たすのは，$0|\mathrm{b}$が成り立つとき，即ち，b＝0のときのみであり，このとき，$a = b = 0$であって，

$$0 \equiv 0(\mathrm{mod}.0) \Rightarrow a = b \qquad (2)$$

を満たす．

$a \neq 0$の場合，(1)式は，$\cdots a \neq 0$を満たす．他方，

$$\frac{b}{0} = 0 \cdots b \qquad (3)$$

であって，与式が成り立つのは，$\cdots b = a$のときに限るといえる．即ち，

$$\cdots a = \cdots b \qquad (4)$$

である．勿論，(4)式は(1)式と(3)式を満たすので，

$$\cdots a = \cdots b \Rightarrow a = b \qquad (5)$$

が成り立つ．逆に，0 を法とするとき，$a \neq b$ならば，

$$a \not\equiv b(\mathrm{mod}.0) \qquad (6)$$

$$\because \quad \frac{a-b}{0} = 0 \cdots a - b \neq 0$$

$$\therefore a \equiv b(\mathrm{mod}.0) \Rightarrow a = b$$

を得る．□