2017.10.7
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

非負整数の分類上の超合成数とゼロ除算

定義）或る非負整数を割り切る非負整数の数量が，１個の場合にはその非負整数を単位元といい，２個の場合には素数といい，３個以上の場合には合成数という．特に，或る非負整数を割り切る非負整数の数量が３個以上で且つ２で割り切れない場合には，これを奇合成数といい，２で割り切れる場合にはこれを偶合成数という．また，全ての非負整数で割り切れる非負整数を超合成数（又は，超偶合成数）という．
以上の定義に従うと，次の定理が成り立つ．

定理）0は，超合成数である．

証明）先ず，0を0で割る場合，可減集合論的ゼロ除算の基本定理，

$$\frac{a}{0} = 0 \cdots a \qquad (1)$$

（ただし，$\cdots a$は，剰余項がaであることを意味する．）より，(1)式において，$a = 0$とおくと，$\cdots a = 0$であるから明らかに，0を0で割り切ることが出来るといえる．
次に，nを任意の自然数とするとき，

$$\frac{0}{n} = 0 \cdots 0 \qquad (2)$$

は自明．以上より，0は全ての非負整数で割り切れるといえる．従って，定義１より，0は超合成数である．□

なお，1を0で割ると(1)式から1余るので1は0で割り切れず，従って1を割り切るのは1自身のみで，定義より1は単位元である．また正整数の素数は0で割ると余りが自身となって割り切れず当該素数は定義の非負整数の中でも1と自身でしか割り切れず，割り切れる非負整数の数量は２つなので素数である．0，1と素数以外の数は，0で割ると自身が余るが1で割り切れて且つ２つ以上の相異なる素数で割り切れるから自身を割り切る非負整数の数量が３つ以上になるので合成数である．

補遺）全ての非負整数は，自身を割り切る相異なる素因数の最高冪の積で表されると考えてみよう．
先ず，自然数の範囲で考えると，Nを任意の自然数とした場合，p_jを昇順j番目の素数，n_jを

0を割り切る素数p_jの最高冪であって$n_j \geq 0$を満たす非負整数とすると，自然数Nは，

$$N = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{n_j}$$

を満たすと共に，

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty} n_j < M$$

を満たす．ただし，Mは十分に大きな正定数である．

ここで，自然数Nを自然数から非負整数に拡張することを考えてみよう．つまり，自然数Nの集合に 0 元を加えるのである．

上記定理によって，0 は超合成数であり，全ての素数p_jを因数としているから，素因数p_jの最高冪n_jは$n_j > 0$を満たす．つまり，

$$\sum_{j=1}^{\dot{\infty}} n_j = \dot{\infty}$$

が成り立つといえる．ここで，$\dot{\infty}$は無限を超えた点，即ち真無限であり，増大の極限ではない．また，素数p_jは，無限個という極限的数量ではなく，真無限個あると考えられ，超合成数は全ての各素数p_jの冪から成る合成数${p_j}^{n_j}$でも割り切れるから，それら各素数p_jの最高冪n_jは真無限の大きさを有すると考えられる．このことから，超合成数 0 は，

$$0 = \left[\!\!\left[\prod_{j=1}^{\dot{\infty}} p_j^{n_j} \right]\!\!\right]_{n_j = \dot{\infty}} = \prod_{m=1}^{\dot{\infty}} m = \dot{\infty}$$

と表すことが出来ると考えられる．即ち，$\dot{\infty} = 0$が成り立つと考えられるのである．

そして，このことからも 0 を除く非負整数は，0 で割り切れないのは或る意味で当たり前であると考えられる．なぜなら，0 は全ての自然数を因数に持つ，即ち無限個の約数を持つのに対して，0 以外の非負整数，即ち，自然数は，高々有限個の約数しか持たず，無限個の約数を持つ 0 で割り切れる訳がないと解釈できるからである．