

2018.4.15

Hiroshi Michiwaki

道脇 裕

乗算と無剰余式除算及び有剰余式除算の原理と構造とゼロ除算

A点から別のB点に「りんご」を運ぶ。ただし、運送前、B点の「りんご」は0 [個] とする。この前提に対して、以下の問について検討する。

Q) A点には「りんご」が a_0 [個] あり、これらをトラックでB点に運ぶ。運送 t 後のB点の「りんご」の個数 b_t は何 [個] か？

A) この問題は、【状態】と【事象】の掛け合わせによる積と、【結果】とが等価であるという関係であることから【状態】×【事象】＝【結果】として求めることが出来るといえる。ここで、【状態】とは、[個数]と[回数]の関係から構成される組立次元(単位)であり、運送[回数]毎の運送[個数]として定義されるといえる。また、ここでの【事象】とは、運送[回数]を意味し、また、【状態】、【事象】、【結果】の各次元は、

$$\text{【状態】} = \frac{\text{【個】}}{\text{【回】}} = [\text{個}]^1 [\text{回}]^{-1} = [\text{個/回}]$$

$$\text{【事象】} = [\text{回}] = [\text{回}]^1$$

$$\text{【結果】} = [\text{個}] = [\text{個}]^1$$

であって、

$$\text{【状態】} \times \text{【事象】} = \frac{\text{【個】}}{\text{【回】}} \times [\text{回}] = [\text{個}] = \text{【結果】}$$

の関係性が成り立つことについては、先の拙著の～ゼロ除算の原理～編にて述べた。ここで問題となったのは、運送が終局するのは結局のところ何回なのか？という疑問が浮かび上がって来たことであった。そこで、本論においては、運送が終局する回数を主題として考えてみよう。

さて、以下の展開においては、次の7つの公理から成る公理系を前提とする。

公理設定

I) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

II) $A = B \Rightarrow A \circ C = B \circ C$ ここで、 \circ は任意の演算を表す。

III) $A \times B = B \times A$

IV) $\frac{B \times C}{A} = \frac{B}{A} \times C$

$$\text{V) } A + B = B + A$$

$$\text{VI) } \frac{B}{A} + \frac{C}{A} = \frac{B+C}{A}$$

$$\text{VII) } 0/0 = 0 \quad \text{又は} \quad 0 \div 0 = 0$$

初期にA点に在る「りんご」の個数を a_0 【個】、 t (time としても times としても何れでもよい) においてB点に在る「りんご」の個数を b_t 【個】とする。

すると、運送毎の【状態】を、所定回数の【事象】として繰り返し運送した際の【結果】としてのB点の「りんご」の個数は、

$$\text{【状態】} \frac{\text{【個】}}{\text{【回】}} \times \text{【事象】} [\text{回}] = \text{【結果】} [\text{個}] \quad (1)$$

で与えられる。この(1)式を、運送する回数を0【回】から0【回】を超える回数まで、個数を0【個】から0【個】を超える個数まで包括して表式化する。つまり、拙著零除算48と零除算49のA1)～A3)とA)とを包含させると、

$$\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \times x_t(\tau)[\text{回}] = b_t[\text{個}] \quad (2)$$

と表される。ただし、ここで、

$$\tau = \begin{cases} 0, & x_t(0) = 0 \\ 1, & x_t(1) = |R| \end{cases}$$

である。しかしながら、(2)式は、 $t=0$ におけるA点における個数、即ち、初期の「りんご」の個数 a_0 【個】や $t > 0$ における「りんご」の個数 a_t 【個】が不明である。そこで、これらを(2)式に含意させる為、

$$a_0[\text{個}] = a_0[\text{個}] \quad (3)$$

の辺々から(2)の辺々を差し引く。つまり、

$$\begin{array}{r} a_0[\text{個}] \qquad \qquad \qquad = a_0[\text{個}] \\ \frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \times x_t(\tau)[\text{回}] = \qquad b_t[\text{個}] \\ \hline a_0[\text{個}] - \frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \times x_t(\tau)[\text{回}] = a_0[\text{個}] - b_t[\text{個}] \end{array} \quad (4)$$

である。勿論、(4)式の右辺は、明らかに、 t において、A点に残存する「りんご」の個数 a_t 【個】であるから、

$$a_0[\text{個}] - \frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \times x_t(\tau)[\text{回}] = a_0[\text{個}] - b_t[\text{個}] = a_t[\text{個}] \quad (5)$$

を得る。(5)式から明らかに、

$$a_0[\text{個}] = a_t[\text{個}] + b_t[\text{個}] \quad (6)$$

が成り立ち、 t における、A点に残存する「りんご」の個数 a_t 【個】と、B点に存在する「りん

ご」の個数 b_t [個]との和は、初期、即ち、 $t = 0$ においてA点に在った「りんご」の個数 a_0 [個]に、常に等しいということを表している。これは、”初数不変の原理” 或いは”総数保存の法則” とでも謂うべきものであつて、あまりにも当たり前といえれば当たり前であるが、乗算には欠けた考え方であり、除算にさえも明確な形では現れていない概念でさえある。

さて、ここで(5)式を別の視点から見てみることにしよう。それは、各項が乗算における数概念の何に対応しているのかという視点である。そこで、(5)式にそれを〈 〉括弧書きで付記したものを(7)式に示す。

$$a_0[\text{個}] - \frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle \times x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle = a_0[\text{個}] - b_t[\text{個}] \langle \text{Bt積} \rangle = a_t[\text{個}] \quad (7)$$

更に、未記載の概念を付記して、

$$\begin{aligned} a_0[\text{個}] \langle \text{A初数} \rangle - \frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle \times x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle &= a_0[\text{個}] \langle \text{A初数} \rangle - b_t[\text{個}] \langle \text{Bt積} \rangle \\ &= a_t[\text{個}] \langle \text{A残数} \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。これで、各項の意味が明確になった。ただし、ここでBt積は、B点におけるt後の「りんご」の個数を表す積を意味する。

ところで、ここで思い出さなければならないのは、結局の所、A点からB点への移動に際して、一体何回の移動で「りんご」の移動は終局するのかという疑問である。つまり、それは(8)式でいうところの、 $x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle$ は、一体どのようにして求められるのか、という問いである。それは、(8)式が示している通り、tの終局点、即ち、 $t = \text{end} = e$ において、 $a_e[\text{個}] \langle \text{A残数} \rangle$ が非負最小化するまで、A点の初期の「りんご」の個数 $a_0[\text{個}]$ から $\mu[\text{個}]/\tau[\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle$ を何回繰り返し除けるかを計量するということの意味している。

さて、ここで、(8)式の変形から運送回数 $x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle$ について解いてみよう。(8)式は、先ず、公理IIによって、両辺から同じモノを減じたり、加えたりすることによって、

$$a_0[\text{個}] \langle \text{A初数} \rangle - (a_0[\text{個}] \langle \text{A初数} \rangle - b_t[\text{個}] \langle \text{Bt積} \rangle) = \frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle \times x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \quad (9)$$

のように変形できる。更に、公理IIによって、(9)式の両辺を $\mu[\text{個}]/\tau[\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle$ で除し、

$$\frac{a_0[\text{個}] \langle \text{A初数} \rangle - (a_0[\text{個}] \langle \text{A初数} \rangle - b_t[\text{個}] \langle \text{Bt積} \rangle)}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle} = \frac{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle \times x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle} \quad (10)$$

を得る。(10)式はやや判り辛いので、公理IVを用いつつ整理すると、

$$\frac{a_0[\text{個}] \langle \text{A初数} \rangle - (a_0[\text{個}] \langle \text{A初数} \rangle - b_t[\text{個}] \langle \text{Bt積} \rangle)}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle} = \frac{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle} \times x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \quad (11)$$

更に、変形を進めて、

$$\begin{aligned}
\frac{a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - (a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - b_t[\text{個}]\langle Bt \text{積} \rangle)}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle} &= \frac{\mu[\text{個}] \tau[\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle}{\tau[\text{回}] \mu[\text{個}] \langle \text{被乗数} \rangle} \times x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \\
&= \frac{\mu \times \tau [\text{個}][\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle}{\mu \times \tau [\text{個}][\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle} \times x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \\
\therefore \frac{a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - (a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - b_t[\text{個}]\langle Bt \text{積} \rangle)}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle} &= \frac{\mu \times \tau [\text{個}][\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle}{\mu \times \tau [\text{個}][\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle} \times x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \quad (12)
\end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\mu \times \tau \neq 0$ ならば、明らかに、 $\mu \neq 0 \wedge \tau \neq 0$ であるから、

$$\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle \neq 0 \quad (13)$$

であって、この場合、明らかに(12)式は、

$$\frac{a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - (a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - b_t[\text{個}]\langle Bt \text{積} \rangle)}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle} = x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \quad (14)$$

とおける。

ところで、 μ と τ の組合せ (μ, τ) について、 $\mu \times \tau = 0$ となるのは、 $(0,1)$ 、 $(\mu \neq 0, 0)$ 、 $(0,0)$ の3通りであり、これらの3通りのケースでは、何れの場合も $x_t(\tau) = 0$ としたのと同値となるのは明かである。それは、何れのケースでも実際に0 [個] を超える「りんご」をB点に運んでいる回数は0 [回] であり、0 [個] の「りんご」を載せて何度B点に行っても、仮想のトラックで「りんご」を運んでみたところで、0 [回] を超えて「りんご」を運んだことにならず、全く運んでいないことと区別が付かないことになる。即ち、運んだ回数は、0 [回] と同値であると言える。

つまり、これら3通りの場合における(12)式右辺にあつては、先ず $(\mu, \tau) = (0,1)$ の場合について、公理VIIを用いて試算すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\mu \times \tau [\text{個}][\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle}{\mu \times \tau [\text{個}][\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle} \times x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle &= \frac{\mu \times \tau}{\mu \times \tau} \times x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \\
&= \frac{0 \times 1}{0 \times 1} \times 0[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \\
&= \frac{0}{0} \times 0[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \\
&= 0 \times 0[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \\
&= 0[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle \quad (15)
\end{aligned}$$

であって、 $x_t(\tau)[\text{回}] \langle \text{乗数} \rangle$ の係数に当たる、

$$\frac{\mu \times \tau [\text{個}][\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle}{\mu \times \tau [\text{個}][\text{回}] \langle \text{被乗数} \rangle} \quad (16)$$

は、有っても無くても結果に変化が無いことが判る. $(\mu \neq 0, 0)$, $(0, 0)$ の場合も同様であることから, (16)式で表される係数は略記可能であり, (12)式は(14)式で全てのケースにおいて代用可能であるといえる.

また, (14)式は, 公理VIを用いて,

$$\frac{a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle} - \frac{a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - b_t[\text{個}]\langle Bt \text{積} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rangle} = x_t(\tau)[\text{回}]\langle \text{乗数} \rangle \quad (17)$$

と変形可能である.

ここで, $\langle \text{被乗数} \rangle \rightarrow \langle \text{除数} \rangle$, $\langle A \text{初数} \rangle \rightarrow \langle A \text{初数} \rangle \text{or} \langle \text{被除数} \rangle$, $\langle Bt \text{積} \rangle \rightarrow \langle Bt \text{積} \rangle$, $\langle \text{乗数} \rangle \rightarrow \langle \text{商} \rangle$ と改められることは言うまでもない. これを(17)式に反映すると,

$$\frac{a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rightarrow \text{被除数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rightarrow \text{除数} \rangle} - \frac{a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - b_t[\text{個}]\langle Bt \text{積} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{被乗数} \rightarrow \text{除数} \rangle} = x_t(\tau)[\text{回}]\langle \text{乗数} \rightarrow \text{商} \rangle \quad (18)$$

となる. (18)式は, 乗算と除算の対応関係を表していると言える. つまり, 逆関係性を表していると言ってもよいだろう.

更に, (18)式を再整理すると,

$$\frac{a_0[\text{個}]\langle \text{被除数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{除数} \rangle} - \frac{(a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - b_t[\text{個}]\langle Bt \text{積} \rangle)\langle \text{剰余数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{除数} \rangle} = x_t(\tau)[\text{回}]\langle \text{商} \rangle \quad (19)$$

を得る. なお, ここで $\langle A \text{初数} \rangle - \langle Bt \text{積} \rangle = \langle \text{剰余数} \rangle$ とした. (19)式はまた,

$$\frac{a_0[\text{個}]\langle \text{被除数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{除数} \rangle} = x_t(\tau)[\text{回}]\langle \text{商} \rangle + \frac{(a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - b_t[\text{個}]\langle Bt \text{積} \rangle)\langle \text{剰余数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{除数} \rangle} \quad (20)$$

と変形可能である. また, (20)式は, (8)式の関係を用いれば,

$$\frac{a_0[\text{個}]\langle \text{被除数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{除数} \rangle} = x_t(\tau)[\text{回}]\langle \text{商} \rangle + \frac{a_t[\text{個}]\langle \text{残数} = \text{剰余数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{除数} \rangle} \quad (21)$$

と置き換え可能である. そして, (21)式は,

$$\frac{a_0[\text{個}]\langle \text{被除数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{除数} \rangle} = x_t(\tau)[\text{回}]\langle \text{商} \rangle \cdots a_t[\text{個}]\langle \text{剰余数} \rangle \quad (22)$$

又は,

$$\frac{a_0[\text{個}]\langle \text{被除数} \rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle \text{除数} \rangle} = x_t(\tau)[\text{回}]\langle \text{商} \rangle \cdots (a_0[\text{個}]\langle A \text{初数} \rangle - b_t[\text{個}]\langle Bt \text{積} \rangle)\langle \text{剰余数} \rangle \quad (23)$$

と書き換えることが出来る. ただし, ここで,

$$\tau = \begin{cases} 0, & x_t(0) = 0 \\ 1, & x_t(1) = |R| \end{cases}$$

である.

ところで, (2)式を $x_t(\tau)$ [回]について解くと,

$$\frac{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}} \times x_t(\tau)[\text{回}] = \frac{b_t[\text{個}]}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}} \quad (24)$$

であるが, (11)式から(16)式までの展開と同様に,

$$x_t(\tau)[\text{回}] = \frac{b_t[\text{個}]}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}} \quad (25)$$

と簡略化してよい. ここで, (19)式と(25)式を比較してみよう. (25)式は, (19)式の左辺を, 整理したモノそのモノであることがわかる. つまり, (19)式左辺は,

$$\frac{a_0[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}\langle\text{除数}\rangle} - \frac{(a_0[\text{個}]\langle\text{A初数}\rangle - b_t[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle)\langle\text{剰余数}\rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}\langle\text{除数}\rangle} = \frac{a_0[\text{個}]}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}} - \frac{a_0[\text{個}]}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}} + \frac{b_t[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}} \\ = \frac{b_t[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}} \quad (26)$$

と展開されるから, 結局(19)式は,

$$\frac{b_t[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]}\langle\text{除数}\rangle} = x_t(\tau)[\text{回}]\langle\text{商}\rangle \quad (27)$$

と表されることになり, (2)式から得られる(25)式と, (19)式から得られる(27)式とが一致することを意味する. しかしながらここで, これら(25)式も(27)式も実は, 系を正確に除する除算になっていないことに注意しなければならない. それは, 本来, 対象としている系の除算における(被除数)は, (Bt積)として表される, t においてB点に存在する「りんご」の個数 b_t [個]ではなく, 初期にA点に存在していた「りんご」の個数 a_0 [個]でなければならないからである.

そして, 個数 b_t [個]は, t の終局点, 即ち, $t = \text{end} = e$ において, a_e [個] (A残数)が非負最小化するまで, A点の初期の「りんご」の個数 a_0 [個]から μ [個]/ τ [回] (被乗数)を何回繰り返し除いた (運送された) 際のB点に在積された「りんご」の個数が b_e [個]となって,

$$b_e[\text{個}] = a_0[\text{個}] \quad (28)$$

を満たす場合のみ, a_e [個] (A残数) = 0となって, (25)式や(27)式は,

$$x_t(\tau)[\text{回}]\langle\text{商}\rangle = \frac{b_e[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} = \frac{a_0[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle}$$

$$\therefore x_t(\tau)[\text{回}]\langle\text{商}\rangle = \frac{a_0[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} \quad (29)$$

となつて、従来の除算の表式に相当する形式になるといえる。このことから判る通り、従来の除算の形式というモノは、(19)式や(20)式における特殊なケースを表しているに過ぎず、逆に言えば、(19)式の系は、従来の除算の本質的な拡張になっているといえる。また、従来の乗算というモノは、A点に初期に何個の「りんご」が在ったのかという点は、考慮せず、逆に、全ての「りんご」は、B点に移されていることを暗黙の前提として、運送【状態】を何回繰り返したのかという運送回数という【事象】に注目して、【結果】としてのB点に移された「りんご」の総数を定式化しているのであり、(19)式の系は、その更に根本の状態に立ち返った系全体を包括的に定式化している点に最大の違いが有るといえる。更に、従来の乗算や除算においては、抽象化され過ぎて無次元化される各項に次元を与えることで、各項同士の関係性を明らかにした。これらの本質的な違いから、乗算における〈被乗数〉、即ち、除算における〈除数〉において組立次元が現れたり、その組立次元に τ 関数が登場したり、その τ 関数が商の変数になっていることが明らかになったのである。そして、これらの構造は、除数が0となる場合であっても何等问题無く、解を与えることも明らかにした。つまり、(19)式の系の定式は、ゼロ除算を原理的に可能ならしめているのである。そして、この定式の中において、従来の乗算の構造、従来の無剰余式除算の構造、更には従来の有剰余式除算の構造をも内包しているのである。

ここで、(19)式における t の終局点についての定式

$$\frac{a_0[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} - \frac{(a_0[\text{個}]\langle\text{A初数}\rangle - b_e[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle)\langle\text{剰余数}\rangle}{\frac{\mu[\text{個}]}{\tau[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} = x_e(\tau)[\text{回}]\langle\text{商}\rangle \quad (30)$$

$$\tau = \begin{cases} 0 & x_t(0) = 0 \\ 1 & x_t(1) = |R| \end{cases}$$

に対して、具体的な数値を代入しながらどのような解が得られるのかを以下の4つのケースについて検証しておこう。

Case1) $a_0 = 100, \mu = 3, \tau \neq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{100[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle - (100[\text{個}]\langle\text{A初数}\rangle - 99[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle)\langle\text{剰余数}\rangle}{\frac{3[\text{個}]}{1[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} - \frac{\frac{3[\text{個}]}{1[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle}{\frac{3[\text{個}]}{1[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} \\ &= \frac{100[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle}{3\frac{[\text{個}]}{[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} - \frac{1[\text{個}]\langle\text{剰余数}\rangle}{3\frac{[\text{個}]}{[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} = \frac{99[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle}{3\frac{[\text{個}]}{[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} = 33(1)[\text{回}]\langle\text{商}\rangle \\ &= 33[\text{回}]\langle\text{商}\rangle \end{aligned}$$

これは、A点の初数 100 [個] の除き被る対象から、3 [個] / 1 [回] ずつ、除いて (B点に運送して) 行けば、33 [回] 商われて、B点に 99 [個] 移すことが出来、そのとき、A点に 1 [個] の「りんご」が余ることを意味する。勿論、この系の「りんご」の総数は、どの時点でも 100 [個] のままである。

Case2) $a_0 = 100, \mu = 0, \tau \neq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{100[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle - (100[\text{個}]\langle\text{A初数}\rangle - 0[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle)\langle\text{剰余数}\rangle}{\frac{0[\text{個}]}{1[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} - \frac{\frac{0[\text{個}]}{1[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle}{\frac{0[\text{個}]}{1[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} \\ &= \frac{100[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle}{0\frac{[\text{個}]}{[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} - \frac{100[\text{個}]\langle\text{剰余数}\rangle}{0\frac{[\text{個}]}{[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} = \frac{0[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle}{0\frac{[\text{個}]}{[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} = 0(1)[\text{回}]\langle\text{商}\rangle \\ &= 0[\text{回}]\langle\text{商}\rangle \end{aligned}$$

これは、A点の初数 100 [個] の除き被る対象から、0 [個] / 1 [回] ずつ、即ち、除く操作をするものの各動作では、1 [個] も移動させない (B点に運送しない) とき、結局、1 [個] も「りんご」は移動されないで、商いは 0 [回] となり、B点に 0 [個] 移す、即ち、元の状態と全く変わらず変化しないので、そのとき、A点には 100 [個] の「りんご」が残存して余るということを意味する。勿論、この系の「りんご」の総数は、どの時点でも 100 [個] のままである。

Case3) $a_0 = 100, \mu = 3, \tau = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{100[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle - (100[\text{個}]\langle\text{A初数}\rangle - 0[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle)\langle\text{剰余数}\rangle}{\frac{3[\text{個}]}{0[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} - \frac{\frac{3[\text{個}]}{0[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle}{\frac{3[\text{個}]}{0[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} \\ &= \frac{100[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle}{\frac{3[\text{個}]}{0[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} - \frac{100[\text{個}]\langle\text{剰余数}\rangle}{\frac{3[\text{個}]}{0[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} = \frac{0[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle}{\frac{3[\text{個}]}{0[\text{回}]} \langle\text{除数}\rangle} = 0(0)[\text{回}]\langle\text{商}\rangle \\ &= 0[\text{回}]\langle\text{商}\rangle \end{aligned}$$

これは、A点の初数 100 [個] の除き被る対象から、3 [個] / 0 [回] ずつ、即ち、除く操作は 1 [回] も為されない (B点に運送しない) とき、結局、1 [個] も「りんご」は移動されないで、商いは 0 [回] となり、B点に 0 [個] 移す、即ち、元の状態と全く変わらず変化しないので、そのとき、A点には 100 [個] の「りんご」が残存して余るということを意味する。勿論、この系の「りんご」の総数は、どの時点でも 100 [個] のままである。なお、 Bt 積の値は、(2)式で与えられる。つまり、 $\tau \neq 0 \Rightarrow x_t(0) = 0$ によって与えられる。

Case4) $a_0 = 0, \mu = 0, \tau = 0$

$$\frac{0[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle}{0[\text{回}]\langle\text{除数}\rangle} = \frac{(0[\text{個}]\langle\text{A初数}\rangle - 0[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle)\langle\text{剰余数}\rangle}{0[\text{回}]\langle\text{除数}\rangle} = \frac{0[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle}{0[\text{回}]\langle\text{除数}\rangle} - \frac{0[\text{個}]\langle\text{剰余数}\rangle}{0[\text{回}]\langle\text{除数}\rangle}$$

$$= \frac{0[\text{個}]\langle\text{Bt積}\rangle}{0[\text{回}]\langle\text{除数}\rangle} = \frac{0[\text{個}]\langle\text{被除数}\rangle}{0[\text{回}]\langle\text{除数}\rangle} = 0(0)[\text{回}]\langle\text{商}\rangle = 0[\text{回}]\langle\text{商}\rangle$$

これは、A点の初数 0 [個] の除き被る対象から、0 [個] / 0 [回] ずつ、即ち、除く個数も除く操作も無い (B点に運送しない) とき、結局、1 [個] も「りんご」は移動されないで、商いは 0 [回] となり、B点に 0 [個] 移す、即ち、元の状態と全く変わらず変化しないので、そのとき、A点には 0 [個] の「りんご」が残存して余る、即ち、1 [個] も存在しないということを意味する。勿論、この系の「りんご」の総数は、どの時点でも 0 [個] のままである。

なお、 Bt 積の値は、(2)式で与えられる。つまり、 $\tau \neq 0 \Rightarrow x_t(0) = 0$ によって与えられる。

補題：次元の抽象化

さて、ここで、次元の抽象化を図って、(19)式の系の定式を更に拡張して締め括ることとしよう。

先の検討によって、乗算では [個]、[回] 及びこれらの組立次元としての [個]¹[回]⁻¹が登場した。しかし、実際の数学の対象とする次元は、これらにとどまらないのは言うまでもない。そこで、これらの次元を抽象化しておくことは、有用であろう。

先の乗算の例にあっては、あくまでも主として対象としているのは、個数であった。そこで、主として対象としている次元であって、【状態】の次元を表すものとして登場した [個] を [主次元] と改め、【事象】の次元として登場した [回] を [副次元] と改めるものとする。これら新たに導入した次元を用いると、被乗数である【状態】の次元は、[主次元]¹[副次元]⁻¹となり、乗数である【事象】の次元は、[副次元] となる。即ち、

$$\text{【状態】} \frac{\text{【主次元】}}{\text{【副次元】}} \times \text{【事象】} [\text{副次元}] = \text{【結果】} [\text{主次元}]$$

と表される。ここでの次元は、何等かの物理量等と結びついているように思われるが、無次元量と有次元量の中間的な存在であって、どちらにも転移し得るモノであると考えるのが適当である。これらの次元を用いると、(19)式は、

$$\frac{a_0[\text{主次元}] \langle \text{被除数} \rangle}{\tau[\text{副次元}] \langle \text{除数} \rangle} - \frac{(a_0[\text{主次元}] \langle A \text{初数} \rangle - b_t[\text{主次元}] \langle Bt \text{積} \rangle) \langle \text{剰余数} \rangle}{\tau[\text{副次元}] \langle \text{除数} \rangle} = x_t(\tau) [\text{副次元}] \langle \text{商} \rangle \quad (31)$$

と表される。ただし、ここで、

$$\tau = \begin{cases} 0, & x_t(0) = 0 \\ 1, & x_t(1) = |R| \end{cases}$$

である。