2014年12月14日
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

複素数の可減集合論的除算

定理１

２つの複素数z_1，z_2の除算z_1/z_2に対して，

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \dots z_4$$

を満たす複素商z_3と複素剰余z_4が存在する．ただし，“…”は“…”の直後のものが剰余項であることを意味する．

定理２

２つの複素数z_1，z_2の除算z_1/z_2において，z_2の複素半径r_2を用いて，$|\{r_2\}|$を実数上の可減集合論的除算における商，s を$|\{r_2\}|$を最大化した際の非負最小実数とするとき，

$$\frac{z_1}{z_2} = |\{r_2\}| \cdot \{\cos(\theta_1 - \theta_2) - i\sin(\theta_1 - \theta_2)\} \dots s\{\cos(\theta_1 - \theta_2) - i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$$

が成り立つ．ただし，θ_1とθ_2は実数でそれぞれz_1，z_2の複素方位角であり，“…”は“…”の直後のものが剰余項であることを意味する．

定理３

$z \in \mathbb{C}$に対して

$$\frac{z}{0} = 0 \dots z$$

が成り立つ．

証明：定理１，２，３の証明を以下に分別せずに示す．

複素数$z = a + bi$（$a,b \in \mathbb{R}$，i：虚数単位）を，オイラーの公式を用いて極形式で表すと，

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta - i\sin\theta) \qquad (1)$$

である．ここでrは，複素平面上における原点からの距離（ここでは，複素半径という）であり，θは実軸正側からの傾斜角であって，r，θは何れも実数である．

これを用いて２つの複素数z_1，z_2を，それぞれ

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad (2)$$

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \qquad (3)$$

と置く．このとき，z_1をz_2で除すると，

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) - i\sin(\theta_1 - \theta_2)\} \qquad (4)$$

と表される．この(4)式は，z_1/z_2の除算の結果生じる，r_1/r_2を複素半径とする複素数であり，{　}内は単位半径方位成分である．

　ところで，実数の可減集合論的除算の定義：

A,Bを実数とするとき，除算B/Aの演算は，

$$|B|-(|\{A\}|\cdot|A|+a)=0 \quad (0\leqq a)\ (A,B,a\in \mathrm{R}) \qquad (5)$$

において，$B_0=B$，$A_j=A$　(j=0,1,2,･･･)として，可減漸化式$B_j-A_{j+1}=B_{j+1}$におけるA_{j+1}（このA_{j+1}を第j+1 可減数と呼ぶ）を元とする集合を第j+1 可減数集合$\{A_{j+1}\}$とし，B_j（このB_jを第j被可減数と呼ぶ）が$B_j>B_{j+1}\geqq 0$を満たすとき，$\{A_{j+1}\}\neq\emptyset$．満たさないとき，$\{A_{j+1}\}=\emptyset$として，全ての可減数集合$\{A_{j+1}\}$を要素とする集合を可減集合$\{A\}$とする．ここに，Bは被除数，Aは除数，$|\{A\}|$は可減集合$\{A\}$の要素数$|\{A\}|$であってB/Aの商であり，aは剰余であって，$|\{A\}|$を最大化したときにとり得る非負最小実数である．

によって，可減集合論的にr_1/r_2を取り扱うと，その剰余をsとするとき，

$$|r_1|-(|\{r_2\}|\cdot|r_2|+s)=0 \quad (0\leq s) \quad (r_1,r_2,s\in \mathrm{R}) \qquad (6)$$

と表される．これより，(4)式は，

$$\frac{z_1}{z_2}=|\{r_2\}|\cdot\{\cos(\theta_1-\theta_2)-i\sin(\theta_1-\theta_2)\}\cdots s\{\cos(\theta_1-\theta_2)-i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \qquad (7)$$

と表される．ここに，(7)式の商と剰余項は，それぞれ

$$z_3=|\{r_2\}|\cdot\{\cos(\theta_1-\theta_2)-i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \qquad (8)$$

$$z_4=s\{\cos(\theta_1-\theta_2)-i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \qquad (9)$$

と置けて，

$$\frac{z_1}{z_2}=z_3\ldots z_4 \qquad (10)$$

と表すことが出来る．ここに，(10)式の商は複素数たる複素商z_3と，剰余は複素数たる複素剰余z_4となっていることがわかる．

　つまり，複素数どうしの除算は，上述のように，可減集合論的に定義可能であって，これは謂わば，z_2の複素半径r_2に対するz_1の複素半径r_1の倍率，即ち複素半径倍率が如何程かを問うものであり，これは同時に，z_1の複素半径r_1から複素半径r_2を何回減じることが出来，且つ，複素方位差が如何程かという２点を問うていることに帰着されることを意味している．これら２つの点を問うことの本質は，元来の複素数zの情報量が２点，即ち，実軸情報と虚軸情報の２つの情報から構成されることに起因する．

　さて，(7)式において，$\theta_1=\theta_2=0$の場合を考える．この場合，(7)式は

$$\frac{z_1}{z_2}=|\{r_2\}|\cdot\{\cos(\theta_1-\theta_2)-i\sin(\theta_1-\theta_2)\}\ldots s\{\cos(\theta_1-\theta_2)-i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

$$= |\{r_2\}| \cdot \{\cos 0 - i \sin 0\} \dots s\{\cos 0 - i \sin 0\}$$
$$= |\{r_2\}| \cdot \{1 - i \cdot 0\} \dots s\{1 - i \cdot 0\}$$
$$= |\{r_2\}| \cdot 1 \dots s \cdot 1$$
$$= |\{r_2\}| \dots s$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \tag{11}$$

を得る．これより，(7)式に表される可減集合論的複素除算が，実数上の可減数合論的除算の自然な拡張になっていることがわかる．

　また，(7)式において，$r_2 = 0$ ならば，(3)式より明らかに$z_2 = 0$ であり，$\theta_2 = |\emptyset|$とおけるので，

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{0}$$
$$= |\{r_2\}| \cdot \{\cos(\theta_1 - \theta_2) - i \sin(\theta_1 - \theta_2)\} \dots s\{\cos(\theta_1 - \theta_2) - i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}$$
$$= 0 \cdot \{\cos(\theta_1 - |\emptyset|) - i \sin(\theta_1 - |\emptyset|)\} \dots s\{\cos(\theta_1 - |\emptyset|) - i \sin(\theta_1 - |\emptyset|)\}$$
$$= 0 \dots s\{\cos(\theta_1 - 0) - i \sin(\theta_1 - 0)\}$$
$$= 0 \dots s\ (\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)$$
$$= 0 \dots r_1\ (\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)$$
$$= 0 \dots z_1$$
$$\therefore \quad \frac{z_1}{0} = 0 \dots z_1 \tag{12}$$

を得る．□