2015.7.23
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

一般除算筆算法とゼロ除算

１．序論

割り算は，除算とも称す．除算とは，2 つの与数 a，b において，a から b を何回除くことが出来るかを問う演算のことである．この演算を比較的合理的に算じ得るものとしては，除算の逆演算である乗算を活用するというのが一般的である．しかしこれは，除算の本質的解法ではなく，また本質でもない．あくまでも一方法論に過ぎない．

例えば，$a\div b=15\div 3$ を計算するとき，

ⅰ．先ずは，適当に 3×4＝12 を考える．しかし，これだと未だ余りが出る．そこで，

ⅱ．次いで，4 より幾分か大きな値として 6 を選出し，3×6＝18 を計算してみる．今度は，少し大き過ぎたので，

ⅲ．最後に，3×5＝15 として，除数と，適当に当て嵌めた数との積が丁度，被除数との一致を見たので 15÷3 の解として 5 を選定する．

この例は，余りにも簡単ではあるが，十分に本質を表している．つまり，本質的には，

15－3＝12　1 回
12－3＝9　2 回
9－3＝6　3 回
6－3＝3　4 回
3－3＝0　5 回

という繰り返し減算操作を進めるものであるが，この操作が面倒なので，解と思しき適当な回数のところまで，掛け算で跳んで合理化を図っているに過ぎない．つまり，上記ⅰ～ⅲの操作は，

ⅰ．15－3×4＝3
ⅱ．15－3×6＝－3
ⅲ．15－3×5＝0

という操作を意味する．

このことは，これまで歴史的に永年実行され続けて来ている除算の解法操作としての乗算は，繰り返し減算として定義される除算を，繰り返し減算によらずに，一部又は全部の減算を，除数と上記例の 4 や 6 などのような擬解（準解）又は，除数と解との積によって端折る操作であるということを意味する．

このことからも判るとおり，除算があたかも乗算の逆演算として定義することが，唯一無二の定義かのように錯覚させるが，本質的には，乗算による除算の解法は，繰り返し減算の端折りの延長線上に在ると考える方が自然である．

除算は，本来，乗算の逆演算として定義されるものではなく，元来，独立に定義されるものであり，その独立定義は，「被除数が除数によって何回減じ得るか，減じた結果の値が非負最小値となる回数を解とする．」というものであり，これこそが除算の本質的な定義であるといえる．

この除算の本質的定義を踏まえ，除算の筆算法（一般除算筆算法）を以下に示す．

２．一般除算筆算法Ⅰ

定義

適当な桁数から成る被除数に対する除算筆算法において，被除数の或る桁につき，該当被除数から除数を１回減じ，その結果として被除数が減少し，その減少値が非負値であるとき，その該当被除数対象桁の上部に，上方に向かって積み上げるようにして○記号を付し，この操作が繰り返し可能な限り，継続して○を更なる上段に書き足す.

もし，被除数から除数を減じても変化しないか，又は負数となるとき，●を付し，一桁小さな次の桁に移行し，上記ステップを繰り返す.

繰り返し操作終了後には，各桁の○の数量を計数し，その計数値を当該桁の商値とする．なお，●は０とする.

例１：234567÷543＝431…534 の一般除算筆算法Ⅰを以下に記す.

４
●３
○●
○○１
０００○○●
●●●○○○
５４３）２３４５６７
−）５４３
１８０２
−）５４３
１２５９
−）５４３
７１６
−）５４３
１７３６
−）５４３
１１９３
−）５４３
６５０
−）５４３
１０７７
−）５４３
５３４

① 被除数対象値 2 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 2 の直上に●を付し，その上に 0（これは，空位の 0 を意味する.）と付して一桁下げる.

② 被除数対象値 23 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 3 の直上に●を付し，その上に 0（これは，空位の 0 を意味する.）と付して一桁下げる.

③ 被除数対象値 234 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 4 の直上に●を付し，その上に 0（これは，空位の 0 を意味する.）と付して一桁下げる.

④ 被除数対象値 2345 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 5 の直上に○を付し，被除数対象値 2345 から除数 543 を 1 回減じ，従来の除算筆算法と同様に，当該除数の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 1802 を記す.

⑤ 減算値 1802 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 5 の上段の○の直上に○を重ねて付し，減算値 1802 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 1259 を記す.

⑥ 減算値 1259 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 5 の上段の最上段の○の直上に○を重ねて付し，減算値 1259 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 716 を記す.

⑦ 減算値 716 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 5 の上段の最上段の○の直上に○を重ねて付し，減算値 716 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 173 を記す.

⑧ 減算値 173 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 5 の上段の最上段の○の直上に●を重ねて付し，その上に○の数量 4 を付して一桁下げる.

⑨ 被除数対象値 1736 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 6 の直上に○を付し，被除数対象値 1736 から除数 543 を 1 回減じ，従来の除算筆算法と同様に，当該除数の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 1193 を記す.

⑩ 減算値 1193 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 6 の上段の○の直上に○を重ねて付し，減算値 1193 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 650 を記す.

⑪　減算値 650 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 6 の上段の最上段の〇の直上に〇を重ねて付し，減算値 650 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 107 を記す.

⑫　減算値 107 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 6 の上段の最上段の〇の直上に●を重ねて付し，その上に〇の数量 3 を付して一桁下げる.

⑬　被除数対象値 1077 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 7 の直上に〇を付し，被除数対象値 1077 から除数 543 を 1 回減じ，従来の除算筆算法と同様に，当該除数の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 534 を記す.

⑭　減算値 534 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 7 の上段の最上段の〇の直上に●を重ねて付し，その上に〇の数量 1 を付して一桁下げる．ここで，整数範囲の演算操作は完了しているので，一旦ここで演算を終了し，減算値 534 を剰余とする．勿論，商の適宜桁（ここでは，被除数対象値 7 の桁の右上部位に）に小数点を付して適当な桁までの小数点以下の演算を実行してもよい.

⑮　つまり，この除算の解は，商 000431 であり，剰余 534 であるが，数学の慣例に従って，最大値より大きな桁の空位の 0 は省略し，商 431，剰余 534 とする.

例２：123÷0＝0…123 の一般除算筆算法Ｉを以下に記す.

```
    ０ ０ ０
    ● ● ●
０）１ ２ ３
    １
    １ ２
    １ ２ ３
    １ ２ ３
```

①　被除数対象値 1 から除数 0 を減じると元の被除数対象値 1 となって不変であるから，被除数対象値 1 の直上に●を付し，その上に 0（これは，空位の 0 を意味する.）と付して，当該被除数 1 の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 1 を記し，一桁下げる.

②　被除数対象値 12 から除数 0 を減じると元の被除数対象値 12 となって不変であるから，被除数対象値 2 の直上に●を付し，その上に 0（これは，空位の 0 を意味する.）と付して，当該被除数 12 の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 12 を記し，一桁下げる.

③　被除数対象値 123 から除数 0 を減じると元の被除数対象値 123 になるので，被除数対象値 3 の直上に●を付し，その上に 0（これは，空位の 0 を意味する.）と付して一桁下げ，当該被除数 123 の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 123 を記す．ここで，整数範囲の演算操作は完了しているので，一旦ここで演算を終了し，減算値 123 を剰余とする．勿論，商の適宜桁（ここでは，被除数対象値 3 の桁の右上部位に）小数点を付して適当な桁までの小数点以下の演算を実行してもよい.

３．一般除算筆算法Ⅱ

定義

一般除算筆算法Ｉの〇を 1 で，●を 0 で置き換え，各々の桁の商の値としての最初の 0 の上段には，その下段の数値の和（0～9）を記す.

例３：234567÷543＝431…534 の一般除算筆算法Ⅱを以下に記す．

```
            ４
            ０３
            １０
            １１１
            １１０
        ０００１１１
５４３）２３４５６７
      ー）５４３
        １８０２
      ー）５４３
        １２５９
      ー）５４３
          ７１６
      ー）５４３
          １７３６
        ー）５４３
          １１９３
        ー）５４３
            ６５０
        ー）５４３
            １０７７
          ー）５４３
              ５３４
```

① 被除数対象値 2 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 2 の直上に 0（これは，空位の 0 を意味する.）と付して一桁下げる．

② 被除数対象値 23 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 3 の直上に 0（これは，空位の 0 を意味する.）と付して一桁下げる．

③ 被除数対象値 234 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 4 の直上に 0（これは，空位の 0 を意味する.）と付して一桁下げる．

④ 被除数対象値 2345 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 5 の直上に 1 を付し，被除数対象値 2345 から除数 543 を 1 回減じ，従来の除算筆算法と同様に，当該除数の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 1802 を記す．

⑤ 減算値 1802 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 5 の上段の 1 の直上に 1 を重ねて付し，減算値 1802 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 1259 を記す．

⑥ 減算値 1259 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 5 の上段の最上段の 1 の直上に 1 を重ねて付し，減算値 1259 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 716 を記す．

⑦ 減算値 716 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 5 の上段の最上段の 1 の直上に 1 を重ねて付し，減算値 716 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 173 を記す．

⑧ 減算値 173 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 5 の上段の最上段の 1 の直上に 0 を重ねて付し，その上に，当該 0 以下の下段の総和である 4 を付して一桁下げる．

⑨ 被除数対象値 1736 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 6 の直上に 1 を付し，被除数対象値 1736 から除数 543 を 1 回減じ，従来の除算筆算法と同様に，当該除数の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 1193 を記す．

① 減算値 1193 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 6 の上段の 1 の直上に 1 を重ねて付し，減算値 1193 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 650 を記す．減算値 650 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 6 の上段の最上段の 1 の直上に 1 を重ねて付し，減算値 650 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 107 を記す．

② 減算値 107 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 6 の上段の最上段の 1 の直上に 0 を重ねて付し，その上に，当該 0 以下の下段の総和である 3 を付して一桁下げる．

③ 被除数対象値 1077 から除数 543 を減じると非負数になるので，被除数対象値 7 の直上に 1 を付し，被除数対象値 1077 から除数 543 を 1 回減じ，従来の除算筆算法と同様に，当該除数の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 534 を記す．

④ 減算値 534 から除数 543 を減じると負数になるので，被除数対象値 7 の上段の最上段の 1 の直上に 0 を重ねて付し，その上に，当該 0 以下の下段の総和である 1 を付して一桁下げる．ここで，整数範囲の演算操作は完了しているので，一旦ここで演算を終了し，減算値 534 を剰余とする．勿論，商の適宜桁（ここでは，被除数対象値 7 の桁の右上部位に）に小数点を付して適当な桁までの小数点以下の演算を実行してもよい．

⑤ つまり，この除算の解は，商 000431 であり，剰余 534 であるが，数学の慣例に従って，最大値より大きな桁の空位の 0 は省略し，商 431，剰余 534 とする．

例４：123÷0＝0…123 の一般除算筆算法Ｉを以下に記す.

```
      ０００
０）  １２３
      １２
      １２３
      １２３
```

① 被除数対象値1から除数0を減じると元の被除数対象値1となって不変であるから，被除数対象値 1 の直上に 0 を付し（これは，空位の 0 を意味する.），当該被除数 1 の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 1 を記し，一桁下げる.

② 被除数対象値 12 から除数 0 を減じると元の被除数対象値 12 となって不変であるから，被除数対象値 2 の直上に 0 を付し（これは，空位の 0 を意味する.），当該被除数 12 の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 12 を記し，一桁下げる.

③ 被除数対象値 123 から除数 0 を減じると元の被除数対象値 123 になるので, 被除数対象値 3 の直上に 0 を付し，当該被除数 123 の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 123 を記す．ここで，整数範囲の演算操作は完了しているので，一旦ここで演算を終了し，減算値 123 を剰余とする．勿論，商の適宜桁（ここでは，被除数対象値 3 の桁の右上部位に）小数点を付して適当な桁までの小数点以下の演算を実行してもよい.

④ つまり，この除算の解は，商 000 であり，剰余 123 であるが，数学の慣例に従って，最大値より大きな桁の空位の 0 は省略し，商 0，剰余 123 とする.

４．一般除算筆算法Ⅲ

ここでは，一般除算筆算法として，従来の除算筆算法に対して一般除算筆算法Ⅱを部分的に適用して拡張した筆算法について示す．序論においても述べたように，従来の除算にあっては，除算の本質的操作である繰り返し減算操作を進めるものであるが，この操作をある程度合理的に省略するため，解と思しき適当な回数のところまで，掛け算で跳んで減算操作を圧縮する．このことは，除算にあっては筆算においても同様である.

例として，一般除算筆算法Ｉ，Ⅱでも度々取り上げた割り算２３４５６７÷５４３について順を追って検証してみよう.

例５：

```
              ４３１
５４３）２３４５６７
    ー）２１７２
          １７３６
      ー）１６２９
            １０７７
        ー）  ５４３
              ５３４
```

① 被除数対象値 2 と除数 543 とでは，2＜543 なるので，一桁下げる.

② 被除数対象値 23 と除数 543 とでは，23＜543 なるので，一桁下げる.

③ 被除数対象値 234 と除数 543 とでは，234＜543 なるので，一桁下げる.

④ 被除数対象値 2345 と除数 543 とでは, 2345≧543 なので, 適当な一桁の或る数（以下，擬解数という.）を除数 543 に乗じた積が被除数対象値 2345 に対して同等以下で最大となりそうな擬解数 4 を選出して，被乗数対象値 5 の直上に，当該擬解数 4 を記し，当該積 2172 を被除数対象値 2345 の直下に記すと共に，当該積 2172 の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 173 を記して一桁下げる.

⑤ 被除数対象値 1736 と除数 543 とでは，1736≧543 なので，適当な一桁の擬解数を除数 543 に乗じた積が被除数対象値 1736 に対して同等以下で最大となりそうな擬解数 3 を選出して，被乗数対象値 6 の直上に，当該擬解数 3 を記し，当該積 1629 を被除数対象値 1736 の直下に記すと共に, 当該積 1629 の下にアンダーラインを引

いて，その下に減算値 107 を記して一桁下げる．

⑥　被除数対象値 1077 と除数 543 とでは，1077≧543 なので，適当な一桁の擬解数を除数 543 に乗じた積が被除数対象値 1077 に対して同等以下で最大となりそうな擬解数 1 を選出して，被乗数対象値 7 の直上に，当該擬解数 1 を記し，当該積 543 を被除数対象値 1077 の直下に記すと共に，当該積 543 の下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 534 を記して一桁下げる．ここで，整数範囲の演算操作は完了しているので，一旦ここで演算を終了し，減算値 534 を剰余とする．勿論，商の適宜桁（ここでは，被除数対象値 7 の桁の右上部位に）に小数点を付して適当な桁までの小数点以下の演算を実行してもよい．つまり，この除算の解は，商 431 であり，剰余 534 となる．ここで，商 431 は本来，桁を下げたことを意味する空位の 0 を付して，000431 とすべきところではあるが，この空位の 0 を省略していることに注意する．

さて，本例の従来の除算筆算法の操作手順（特に，④⑤⑥）からも判るとおり，擬解数の選出は，適当な一桁の数を試算的に幾つか除数に乗じて，その中で最適なモノを選出しているに過ぎない．これは，除数を繰り返し操作として何回減じることが出来るかは，操作を実行してみないと決定できないと言う本質に由来すると言ってよい．つまり，各桁の解の決定は，逆演算とされる乗算として成立するモノを適宜選出しているに過ぎないのである．

そこで，この不甲斐ない操作を，一般除算筆算法Ⅱによる手順を，従来の除算筆算法に対して導入することで，合理的に除算の筆算における演算操作を進めることが可能な計算方法を以下に示す．

例６：

Step1　先ず，無理な擬解数の選出をせず，十分に余りの大きな擬解数を立てて，被除数対象値 5 の直上に擬解数 3 を記し，除数 543 と擬解数 3 との積 1629 を，被除数対象数 2345 の直下に記して，その下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 716 を記す．

　　　　　３
５４３）２３４５６７
　－）１６２９
　　　７１６

Step2　次いで，前記減算値 716 が，716≧543 であることから減算値 716 から除数 543 を減じると非負数になるので，前記擬解数 3 の上段の直上に 1 を重ねて付し，減算値 716 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 173 を記して，一桁下げる．

　　　　　１
　　　　　３
５４３）２３４５６７
　－）１６２９
　　　７１６
　　－）５４３
　　　１７３６

Step3　次いで，被除数対象数 1736 が，1736≧543 であるが，無理な擬解数の選出をせず，十分に余りの大きな擬解数を立てて，被除数対象値 6 の直上に擬解数 2 を記し，除数 543 と擬解数 2 との積 1086 を，被除数対象数 1736 の直下に記して，その下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 650 を記す.

```
               １
               ３２
５４３）２３４５６７
    －）１６２９
          ７１６
      －）５４３
          １７３６
      －）１０８６
            ６５０
```

Step4　次いで，前記減算値 650 が，650≧543 であることから減算値 650 から除数 543 を減じると非負数になるので，前記擬解数 2 の上段の直上に 1 を重ねて付し，減算値 650 から除数 543 を 1 回減じ，その下に減算値 107 を記して，一桁下げる.

```
               １１
               ３２
５４３）２３４５６７
    －）１６２９
          ７１６
      －）５４３
          １７３６
      －）１０８６
            ６５０
        －）５４３
            １０７７
```

Step5　次いで，被除数対象数 1077 が，1077≧543 であるが，無理な擬解数の選出をせず，十分に余りの大きな擬解数を立てて，被除数対象値 7 の直上に擬解数 1 を記し，除数 543 と擬解数 1 との積 543 を，被除数対象数 1077 の直下に記して，その下にアンダーラインを引いて，その下に減算値 534 を記す.

```
              1 1
              3 2 1
5 4 3) 2 3 4 5 6 7
    -) 1 6 2 9
          7 1 6
      -) 5 4 3
          1 7 3 6
      -) 1 0 8 6
            6 5 0
        -) 5 4 3
            1 0 7 7
          -) 5 4 3
              5 3 4
```

Step6　次いで，被除数対象数 534 が，534＜543 であるから一桁下げる．ここで，整数範囲の演算操作は完了しているので，一旦ここで演算を終了し，減算値 534 を剰余とする．勿論，商の適宜桁（ここでは，被除数対象値 7 の桁の右上部位に）に小数点を付して適当な桁までの小数点以下の演算を実行してもよい．ここで，擬解数の最上段の上にアッパーラインを引いて，その上に各桁の擬解数の総和を記す．

```
              4 3 1
             -------
              1 1
              3 2 1
5 4 3) 2 3 4 5 6 7
    -) 1 6 2 9
          7 1 6
      -) 5 4 3
          1 7 3 6
      -) 1 0 8 6
            6 5 0
        -) 5 4 3
            1 0 7 7
          -) 5 4 3
              5 3 4
```

上記の通り，この除算の解は，商 431 であり，剰余 534 となる．■

以上の手順に沿えば，除算の筆算は，従来法に比して合理的に進行することが可能となる．従来であれば、よくある誤った擬解数（最適ではない）を立てた場合，消しゴムなどで消して書き

直すという操作が必要であったが，この方法によればそのような作業は不要となる．勿論，擬解数が小さめではなく大き過ぎた場合には，擬解数の上段に立てる追加の擬解数を正数ではなく，負数として扱うことでキャンセルさせることが可能である．しかしながらこの場合，計算は上段のモノから下段のモノを差し引くのではなく，加え合わせるなどの操作が混入してきて煩雑となる．従って，初期の擬解数として立脚させるべき適当な数は，比較的小さめに選定するのが好い．
■